Nicht für den Austausch

Mathematik

Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Breslau

Vorgelegt von

Hans-Heinrich Ostmann

aus Beuthen OS.

Breslau 1940

Verlag von S. Hirzel in Leipzig · 1940

Referent: Prof. Dr. Feigl

Korreferent: Prof. Dr. Radon

Examen rigorosum: 29. Juni 1938

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau

Die Arbeit ist erschienen in „Deutsche Mathematik", Jahrgang 1940, Heft 3
Verlag S. Hirzel, Leipzig — Gedruckt bei A. Heine GmbH., Gräfenhainichen

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549814_0045

Über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen*).

Von Hans-Heinrich Ostmann in Breslau.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Einleitung 3
§ 2. Der Strukturſatz und Folgerungen 8
§ 3. Behandlung des Falles 1: $J(n) \geqq 0$ für alle $n \geqq 0$ und Beweis der Iterationsformel 11
§ 4. Der Fall 2: Es gibt ein $n = j$ mit $J(n) = -1$ 12
I. Bezeichnungen 12
II. Der Äquivalenzſatz 13
III. Die Maßteilung 14
IV. Die J-Intervalle 16
V. Haupt- und Nebenunterintervalle 19
VI. Die hinreichenden Bedingungen 24
VII. Abſchluß des Beweiſes für den allgemeinen Fall 37

§ 1. Einleitung.

I. Für die additive Zahlentheorie ſind in neuerer Zeit Begriffsbildungen weſentlich geworden, die auch den Ausgangspunkt der anſchließenden Betrachtungen bilden ſollen.

Es bezeichne $\mathfrak{M}$ irgendeine Menge nichtnegativer ganzer Zahlen, die wenigſtens die Zahl 0 als Element enthält[1]). Unter $M(n)$ verſtehe man die Anzahl der poſitiven Zahlen von $\mathfrak{M}$, die die beliebige ganze Zahl $n \geqq 0$ nicht übertreffen[2]). Man ſetze noch $\frac{M(0)}{0} = 1$ feſt.

Definition 1: Unter der Dichte $\Delta(\mathfrak{M})$ der Menge $\mathfrak{M}$ verſteht man die untere Grenze der Zahlenfolge $\frac{M(0)}{0}, \frac{M(1)}{1}, \frac{M(2)}{2}, \ldots$, alſo:

$$1 \geqq \Delta(\mathfrak{M}) = \mu = \underline{\operatorname{fin}} \frac{M(n)}{n} \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Das liefert unmittelbar die Ungleichung

$$n \geqq M(n) \geqq n\mu \geqq 0. \tag{1}$$

Iſt $1 \notin \mathfrak{M}$, ſo folgt aus $\frac{M(1)}{1} = 0$ ſchon $\Delta(\mathfrak{M}) = \mu = 0$. — Iſt $n = n_0 \geqq 0$ und $(n_0 + 1) \notin \mathfrak{M}$, ſo erhält man offenbar: $\frac{M(n_0)}{n_0} \geqq \frac{M(n_0+1)}{n_0+1}$, iſt dagegen $(n_0 + 1) \in \mathfrak{M}$, ſo hat man $\frac{M(n_0)}{n_0} \leqq \frac{M(n_0+1)}{n_0+1}$; wäre nämlich $\frac{M(n_0)+1}{n_0+1} < \frac{M(n_0)}{n_0}$, ſo erhielte man daraus:

$$n_0 M(n_0) + n_0 < n_0 M(n_0) + M(n_0), \quad \text{alſo} \quad n_0 < M(n_0)$$

im Widerſpruch zu (1).

---

*) Dieſe Arbeit wurde von der Naturwiſſenſchaftlichen Fakultät der Schleſiſchen Friedrich-Wilhelms-Univerſität zu Breslau als Diſſertation (D 2) angenommen.

[1]) Dieſe Feſtſetzung iſt in der Literatur nicht einheitlich. Nimmt man die Null nicht mit auf, ſo muß nur die ſpäter folgende Definition 2 (Erklärung der Summe) anders gefaßt werden.

[2]) Entſprechend ſoll für eine durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{N}, \ldots$ bezeichnete Menge die Anzahlfunktion ſtets durch den entſprechenden großen lateiniſchen Anfangsbuchſtaben, alſo $A(n), B(n), \ldots, N(n), \ldots$, bezeichnet werden. Man beachte noch, daß ſtets $M(0) = 0$ iſt.

Definition 2: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen im obigen Sinn, so versteht man unter der Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die Gesamtmenge der Zahlen von der Form $a + b$, wobei $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$ ist. Sind allgemein $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ solche Mengen, so ist die Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k$ die Gesamtheit der Zahlen der Form $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a_2 \in \mathfrak{A}_2$, $\ldots$, $a_k \in \mathfrak{A}_k$.

Diese Summenbildung ist kommutativ und assoziativ, weil es die gewöhnliche Summenbildung auch ist. Weiter folgt aus der Definition direkt, daß $\mathfrak{A}_\varkappa \subset \mathfrak{C}$ ist für jedes $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$; mithin ist die Vereinigungsmenge $(\mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_k) \subset \mathfrak{C}$.

Ist insbesondere $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}$, so schreibt man auch kurz

$$\mathfrak{C} = k\,\mathfrak{A}.$$

Definition 3: Wenn zu zwei beliebig gegebenen Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl k existiert, so daß $\mathfrak{A} \subset k\mathfrak{B}$ ist, dann heißt $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{A}$. Die kleinste Zahl k, die das leistet, heißt die Ordnung der Basis $\mathfrak{B}$ in bezug auf $\mathfrak{A}$.

Wird die Menge der nicht negativen ganzen Zahlen mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet — diese Bezeichnung wird, wie die übrigen jetzt eingeführten, im Verlaufe der Arbeit beibehalten —, so lautet der Basissatz: Jede Menge positiver Dichte bildet eine Basis von $\mathfrak{N}$ [3]).

Von diesem Satz wird im folgenden kein Gebrauch gemacht; es wird sich aber aus den hier angestellten Betrachtungen ein Beweis des Satzes mitergeben.

Man sieht ohne weiteres, daß der Menge $\mathfrak{N}$, und nur dieser, die Dichte 1 zukommt.

Für $0 \leq x \leq y$, x und y ganz, verstehe man unter $M(x, y) = M(\mathfrak{J})$ die Anzahl der positiven Zahlen von $\mathfrak{M}$, die dem abgeschlossenen Intervall $[x, y] = \mathfrak{J}$ [4]) angehören. Bei dieser Bezeichnung gilt dann

$$M(n) = M(1, n) = M(0, n)$$

sowie:

$$N(x, y) = y - x + 1 \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{2}$$

Definition 4: Länge des Intervalls $\mathfrak{J} = [x, y]$ heißt die Zahl $N(\mathfrak{J}) = N(x, y)$.

Ferner gilt stets:

$$M(x, y) + M(y + 1, z) = M(x, z). \tag{3}$$

II. Im Anschluß an den Basissatz erhebt sich allgemein die Frage nach der Dichte der Summe. Sei vorerst nur die Summe zweier Mengen betrachtet: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; es werde $\Delta(\mathfrak{A}) = \alpha$, $\Delta(\mathfrak{B}) = \beta$, $\Delta(\mathfrak{C}) = \gamma$ gesetzt. Dann wird eine Funktion $f(x, y)$ gesucht so, daß $\gamma \geq f(\alpha, \beta)$ ist. Dazu ist grundsätzlich zu bemerken, daß $f(x, y)$ niemals so bestimmt werden kann, daß an Stelle des „$\geq$"-Zeichens das „$=$"-Zeichen treten kann. Zum Beweise betrachte man die folgenden beiden Beispiele:

Beispiel 1:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \{0, 1, 4, 5, \ldots\},\ \mathfrak{C} = \{0, 1, 2, 4, 5, \ldots\}\ [5]):$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3},\quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

[3]) L. Schnirelmann, Über additive Eigenschaften von Zahlen. Math. Ann. 107 (1933), S. 649—690; insbesondere S. 653—654.

[4]) Dabei soll $[x, y]$ als aus ganzen Zahlen bestehend gedacht werden, also $[x, y] = \{x, x + 1, \ldots, y\}$, das heißt, es ist $[x, y] \subset \mathfrak{N}$.

[5]) Die Bezeichnung $n, \ldots$ soll bedeuten, daß von der ganzen Zahl n an alle Elemente von $\mathfrak{N}$ in der beschriebenen Menge enthalten sind.

Beispiel 2:

$$\mathfrak{A}=\{0, 1, 4, 5, \ldots\}, \mathfrak{B}=\{0, 1, 2, 7, 8, \ldots\}; \mathfrak{C}=\mathfrak{N}:$$
$$\alpha=\beta=\frac{1}{3}, \gamma=1.$$

Beispiel 1 und 2 zusammen zeigen, daß γ durch α und β nicht eindeutig bestimmbar ist. Aus Beispiel 1 folgt noch, daß $f(\alpha, \beta)$ nicht für alle Wertepaare (α, β) — mit der von selbst verständlichen Einschränkung $\alpha+\beta<1$ — größer als $\alpha+\beta$ sein kann, da ja dort $\gamma=\frac{2}{3}=\alpha+\beta$ ist. Auch im Falle $\alpha \neq \beta$ ist das nicht durchweg möglich, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3:

$$\mathfrak{A}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, \ldots\}, \mathfrak{B}=\{0, 1, 2, 9, \ldots\}; \mathfrak{C}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \ldots\}:$$
$$\alpha=\frac{5}{8}, \beta=\frac{1}{4}, \gamma=\frac{7}{8}=\alpha+\beta, \quad \text{aber} \quad \alpha \neq \beta.$$

Das schließt jedoch nicht aus, daß für gewisse Wertepaare (α, β) notwendig $\gamma \geqq f(\alpha, \beta) > \alpha+\beta$ sein kann [6]).

Weil $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$, so folgt noch sofort:

$$\gamma \geqq \operatorname{Max}(\alpha, \beta).$$

III. Es handelt sich jetzt um die Aufgabe, γ möglichst gut abzuschätzen. Hier sind bisher im wesentlichen folgende Ergebnisse erzielt worden:

(5_1) $\gamma \geqq \alpha+\beta-\alpha\beta$ [7]),

(5_2) $\gamma \geqq 2\alpha$, wenn $\alpha \leqq \beta$ ist [8]),

(5_3) $\gamma \geqq \operatorname{Max}(\alpha+\beta^*, \beta+\alpha^*)$ mit $\alpha^*=\underline{\operatorname{fin}}\frac{A(n)}{n+1}$, $\beta^*=\underline{\operatorname{fin}}\frac{B(n)}{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$ [9]),

(5_4) $\gamma \geqq \operatorname{Max}\left(\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{\beta}{1-\alpha}\right)$ [10]).

Aus (5_1) bis (5_4) ergeben sich noch weitere Abschätzungen [11]). Die Abschätzungen (5_1) bis (5_4) lassen sich folgendermaßen auf endlich viele Summanden — $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\cdots+\mathfrak{A}_k$, $\Delta(\mathfrak{A}_\varkappa)=\alpha_\varkappa$ — übertragen:

$$\gamma \geqq 1-\prod_{\varkappa=1}^{k}(1-\alpha_\varkappa), \gamma \geqq k\alpha, \quad \text{wenn} \quad \alpha=\operatorname{Min}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \text{ ist},$$

$$\gamma \geqq \alpha_\lambda+\sum_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq \lambda}}^{k}\alpha_\varkappa^*, \quad \alpha_\varkappa^*=\underline{\operatorname{fin}}\frac{A_\varkappa(n)}{n+1}, \quad n=1, 2, \ldots, \gamma \geqq \frac{\alpha_1}{\prod_{\varkappa=2}^{k}1-\alpha_\varkappa}, \quad \alpha_1 \geqq \alpha_\varkappa.$$

---

[6]) Vgl. § 2, IV.

[7]) E. Landau, Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. 1930, S. 255—276. Von dieser, wie auch von den übrigen noch erwähnten Arbeiten wird im vorliegenden Text kein Gebrauch gemacht werden. — Betreffs einer ausführlichen zusammenfassenden Darstellung sei auf H. Rohrbach, Einige Neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie, Jber. dtsch. Math.-Ver. 48 (1938), S. 199—236, verwiesen.

[8]) A. Khinchine, Zur additiven Zahlentheorie. Rec. math. Moscou 39, III, 27—34 (1932).

[9]) A. S. Besicovitch, On the density of the sum of two sequences of integers. J. London Math. Soc. 10 (1935), S. 246—248.

[10]) J. Schur, Der Begriff der Dichte in der additiven Zahlentheorie. S.-B. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 1936, S. 269—297.

[11]) Vgl. Fußnote 10 und A. Brauer, Über die Dichte der Summen von Mengen positiver ganzer Zahlen I. Ann. Math., Princeton (2) 39 (1938), S. 322—340.

Bezeichnet $\mathfrak{C}^{(0)}$ diejenige Untermenge von $\mathfrak{C}$, die die Null und die Elemente der Form $a+b$ mit $a \neq 0$ enthält, so beziehen sich (5_1), (5_3) und (5_4) bereits in folgender Weise auf $\mathfrak{C}^{(0)}$, wobei $\Delta(\mathfrak{C}^{(0)}) = \gamma^{(0)}$ ist:

$$\gamma^{(0)} \geqq \alpha + \beta - \alpha\beta,$$
$$\gamma^{(0)} \geqq \alpha + \beta^*,$$
$$\gamma^{(0)} \geqq \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Es ist nun die Behauptung ausgesprochen worden, daß $\gamma^{(0)} \geqq \alpha + \beta^*$ die exakte untere Grenze für $\mathfrak{C}^{(0)}$ sei [12]); diese Behauptung wird auf folgendes Beispiel gestützt [12]):

$$\mathfrak{A} = \{0, 1, 10, \ldots\},\ \mathfrak{B} = \{0, 1, 9, 10, \ldots\};\ \mathfrak{C}^{(0)} = \{0, 1, 2, 10, \ldots\}:$$

$\alpha = \beta^* = \frac{1}{9}$, $\gamma^{(0)} = \frac{2}{9} = \alpha + \beta^*$. Hier ist übrigens auch $\alpha + \beta - \alpha\beta = \frac{2}{9}$. Abgesehen von der Bemerkung im Anschluß an Beispiel 3 läßt sich dieser Behauptung das folgende Beispiel gegenüberstellen:

Beispiel 4:

$$\mathfrak{A} = \{0, 1, 3, 6, 7, \ldots\},\ \mathfrak{B} = \{0, 1, 3, 5, 6, \ldots\};\ \mathfrak{C}^{(0)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, \ldots\}:$$

$$\alpha = \frac{2}{5},\ \beta = \frac{1}{2},\ \beta^* = \frac{1}{3};\ \alpha + \beta^* = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15};\ \gamma^{(0)} = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{4}{5} > \frac{11}{15} = \alpha + \beta^*.$$

Es besteht nun die vielfach ausgesprochene, bis heute noch nicht bestätigte Vermutung, daß stets $\gamma \geqq \alpha + \beta$ ist.

IV. Die anschließenden Betrachtungen sollen dazu dienen, hinreichende Bedingungen für die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu finden, so, daß $\gamma \geqq \alpha + \beta$ ist. Es sei ausdrücklich betont, daß es sich dabei nicht um — grob gesprochen — leicht nachprüfbare Bedingungen handeln soll, sondern nur darum, einen Beitrag zur Einengung des Problems zu liefern. Für die hierbei nicht erfaßten Mengen wird sich dann noch leicht eine Abschätzung ergeben, deren Natur jedoch verschieden ist von den Abschätzungen (5_1) bis (5_4).

Für diese neue Abschätzung werde von nun an, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, stets $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, also $1 \in \mathfrak{A}$ und $1 \in \mathfrak{B}$ angenommen, und es werden die Vereinigungsmenge $\mathfrak{V} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, ferner die Funktion

$$J(n) = A(n) + B(n) - n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

und schließlich noch

$$\underline{\operatorname{fin}}\, \frac{A(n) + B(n)}{n} = \sigma \quad \left(\frac{A(0) + B(0)}{0} = 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots\right) \tag{7}$$

eingeführt. Es gilt stets, wie man unmittelbar erkennt:

$$|J(n+1) - J(n)| \leqq 1 \quad \text{und} \quad 1 \geqq \sigma \geqq \alpha + \beta \quad \text{für} \quad \alpha + \beta \leqq 1.$$

Da ferner $J(0) = 0$, $J(1) = 1$, $J(2) \geqq 0$ ist, so ergeben sich folgende zwei Fälle:

Fall 1: Es ist $J(n) \geqq 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$,

Fall 2: Es gibt eine kleinste Zahl $n = j\ (\geqq 3)$ so, daß $J(j) = -1$ ist.

Bildet man die Summe $\mathfrak{V} + \mathfrak{D} = \mathfrak{C}'\,(\mathfrak{C}$ und setzt $\Delta(\mathfrak{C}') = \gamma'$, so beziehen sich die soeben erwähnten hinreichenden Bedingungen bereits auf die Gültigkeit von

$$\gamma \geqq \gamma' \geqq \sigma \geqq \alpha + \beta, \quad \text{wenn} \quad \sigma < 1 \text{ ist.}$$

[12]) Vgl. Fußnote 9, insbesondere S. 248.

Für die nicht einbegriffenen Mengen wird gezeigt werden:

Im Fall 1 gilt stets:

$$\gamma = \gamma' = \sigma = 1 .$$

Im Fall 2 gilt stets:

$$\gamma \geqq \gamma' \geqq \sigma - \frac{1}{j+2} \geqq \alpha + \beta - \frac{1}{j+2} \text{ [13]}. \tag{8}$$

Daß im Fall 1 stets $\sigma = 1$ ist, erkennt man sofort auf Grund von (6):

$$A(n) + B(n) = J(n) + n \geqq n \quad \text{für alle} \quad n \geqq 0 ,$$

also:

$$\frac{A(n) + B(n)}{n} \geqq 1 \quad \text{für alle} \quad n \geqq 0 ,$$

mithin $\sigma = \underline{\text{fin}} \frac{A(n) + B(n)}{n} = 1$. Umgekehrt folgt aus $\sigma = 1$ offenbar $J(n) \geqq 0$. Daß trotzdem $\alpha + \beta < 1$ sein kann, zeigt das

Beispiel 5:

$$\mathfrak{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, \ldots\}, \mathfrak{B} = \{0, 1, 4, 5, 7, 8, \ldots\}; \mathfrak{C}' = \mathfrak{C} = \mathfrak{N}:$$

$J(0) = 0, J(1) = 1, J(2) = 0, J(3) = 0, J(4) = 0, J(5) = 1, J(6) = 0, J(7) = 1 > 0, \ldots,$ also $J(n) \geqq 0$ für alle $n \geqq 0$ und $\sigma = 1$; es ist aber $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}$, folglich $\alpha + \beta = \frac{5}{6} < 1$.

Daß $\gamma = 1$ ist, wenn $\alpha + \beta \geqq 1$ ist, zeigt bereits die Formel (5_4), ist aber auch leicht direkt zu bestätigen.

Die hauptsächliche Beachtung verdient naturgemäß nunmehr der Fall 2.

Zunächst gilt offenbar stets $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}'$, da $0 \in \mathfrak{D}$ ist. Außer diesen Elementen sind also nur noch solche Summen $a + b$ in $\mathfrak{C}'$ enthalten, bei denen ebenfalls wenigstens einer der Summanden dem Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angehört. Dieses läßt noch eine interessante Form für (8) zu: Es ist nämlich $\mathfrak{C}'$ vollkommen bestimmt durch $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{D}$, desgleichen aber auch j und σ; denn es gilt ja offenbar immer:

$$A(n) + B(n) = V(n) + D(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Sind daher $\mathfrak{A}'$, $\Delta(\mathfrak{A}') = \alpha'$, und $\mathfrak{B}'$, $\Delta(\mathfrak{B}') = \beta'$, irgendzwei Mengen mit $\mathfrak{A}' \dotplus \mathfrak{B}' = \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{D}$, so muß auch

$$\gamma \geqq \gamma' \geqq \sigma - \frac{1}{j+2} \geqq \alpha' + \beta' - \frac{1}{j+2}$$

sein; betrachtet man insbesondere die Gesamtheit aller Mengenpaare $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}')$, die in Vereinigungsmenge und Durchschnitt übereinstimmen, und setzt man [14]

$$(\alpha + \beta)_{Max} = \overline{\text{fin}}\,(\alpha' + \beta') ,$$

so gilt also auch

$$\gamma \geqq \gamma' \geqq \sigma - \frac{1}{j+2} \geqq (\alpha + \beta)_{Max} - \frac{1}{j+2} .$$

Es ist wesentlich, daß auch der Fall $1 > \sigma \geqq (\alpha + \beta)_{Max} > \alpha + \beta$ [15] eintreten kann. Daß die dadurch zu erreichende Verbesserung mitunter sehr bedeutend sein kann, wird deutlich

[13] In Wahrheit wird etwas mehr bewiesen werden, insofern nämlich, als j in (8) durch eine allgemeinere Größe ersetzt werden darf, für die $(j + 1)$ nur eine untere Schranke darstellt. Es kann jedoch an dieser Stelle noch keine Beschreibung dieser Größe gegeben werden (vgl. § 4, Definition 10).

[14] Es ist dabei natürlich gleichgültig, ob es ein Mengenpaar, deren Dichtensumme gleich $(\alpha + \beta)_{Max}$ ist, gibt oder nicht. [15] Daß auch $\sigma > (\alpha + \beta)_{Max}$ gelten kann, wird in § 2, III noch gezeigt werden.

durch das folgende

Beispiel 6:

$$\mathfrak{A}=\{0, 1, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 15, 16, \ldots\},\ \mathfrak{B}=\{0, 1, 2, 4, 8, 11, 15, 16, \ldots\}:$$

$$\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{5}{14},\ \alpha+\beta=\frac{29}{42}=\frac{87}{126},\ \sigma=\frac{6}{7}=(\alpha+\beta)_{Max}\ ^{16}),\ j=7,\ \frac{1}{j+2}=\frac{1}{9}.$$

Man hat mithin: $\alpha+\beta-\frac{1}{9}=\frac{29}{42}-\frac{1}{9}=\frac{73}{126}$, dagegen: $\sigma-\frac{1}{9}=\frac{47}{63}=\frac{94}{126}=\frac{87}{126}+\frac{7}{126}$ $=\alpha+\beta+\frac{1}{18}$, das heißt, man gewinnt sogar:

$$\gamma\geqq\gamma'\geqq\alpha+\beta+\frac{1}{18},$$

hier ganz abgesehen davon, daß Beispiel 6 schon eine der hinreichenden Bedingungen (vgl. S. 24, Satz I) erfüllt.

V. Es bleibt noch der Fall nachzutragen, daß mindestens eine der beiden Dichten α, β gleich Null ist, etwa: $\alpha=0, \beta\geqq 0$. Es sei zunächst $1\in\mathfrak{D}$. In diesem Fall gestattet ein später folgender Satz, der sogenannte Äquivalenzsatz (§ 4, II), in sämtliche Betrachtungen den Fall $\alpha=0, \beta\geqq 0$, wenn nur $1\in\mathfrak{D}$ ist, miteinzubegreifen. Ist jedoch $1\notin\mathfrak{D}$, so gilt ohne weiteres nur mit Hilfe von (2):

$$\gamma\geqq\gamma'\geqq\Delta(\mathfrak{B})=(\alpha+\beta)_{Max}\geqq\operatorname{Max}(\alpha', \beta')=\alpha'+\beta',$$

wobei wieder $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ mit den Dichten α' und β' irgendzwei Mengen sind mit $\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'=\mathfrak{D}$. Ist überdies noch $1\notin\mathfrak{B}$, so gilt offenbar nur die triviale Beziehung: $\gamma=\gamma'=\sigma=\alpha+\beta=0$. Der Fall $1\notin\mathfrak{D}$ werde für das folgende seiner Belanglosigkeit wegen durchweg ausgeschlossen.

Das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis sowohl der erwähnten hinreichenden Bedingungen als auch der Formel (8) bildet ein Satz, der als Strukturſatz bezeichnet werden soll. Dieser Satz wird im nächsten Paragraphen ausgesprochen werden, und es wird als unmittelbare Folge die Formel (8) bewiesen werden. An die Formel (8) anknüpfende Abschätzungen für die Dichte der Summe mehrer Summanden führen zum Beweis des Basissatzes. Der Beweis des Strukturſatzes nimmt den Rest der Arbeit ein.

§ 2. Der Strukturſatz und Folgerungen.

I. Der Strukturſatz für die Summe zweier Mengen: Zu zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ läßt sich stets eine in ihrem Durchschnitt $\mathfrak{D}$ enthaltene Menge

$$\mathfrak{Z}=\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\varkappa, \ldots\},\qquad (z_0=0,\ z_1=1,\ z_\varkappa<z_{\varkappa+1})$$

so angeben, daß für die Summen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ gilt:

$$\frac{C(z_\varkappa, n)}{N(z_\varkappa, n)}\geqq\frac{C'(z_\varkappa, n)}{N(z_\varkappa, n)}\geqq\sigma-\frac{\varepsilon}{j+\varkappa}\geqq\alpha+\beta-\frac{1}{j+\varkappa}\tag{10}$$

$$(n=z_\varkappa, z_\varkappa+1, z_\varkappa+2, \ldots;\ \varkappa=0, 1, 2, \ldots).$$

Dabei ist ε stets gleich 0 oder 1. Für $\varkappa=0$ und 1 mit $n\in[z_0, 2(z_2+j+1)]$ $=[0, 2(z_2+j+1)]$ und für $\varkappa>2$ mit $n\in[z_\varkappa, 2(z_\varkappa+j+\varkappa-1)]$ ist $\varepsilon=0$. Diese

[16]) Hier ist noch $\Delta(\mathfrak{B}+\mathfrak{D})=\gamma'=\frac{6}{7}$.

Menge $\mathfrak{Z}$, die endlich oder unendlich sein kann, ist nur von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{D}$ abhängig.

Aus diesem Satz folgt sofort der Beweis der Formel (8): Bestimmt man nämlich $C'(z_\varkappa, n)$ aus (10) für $\varkappa = 0$ und 2, so erhält man, da ja nur noch die n mit $n > z_2$ interessieren [17]):

$$\frac{C(0,n)}{N(0,n)} \geqq \frac{C'(0,n)}{N(0,n)} = \frac{C'(0,z_2-1)+C'(z_2,n)}{n} \geqq \frac{N(0,z_2-1)\,\sigma + N(z_2,n)\left(\sigma - \frac{1}{j+2}\right)}{n}$$

$$= \frac{N(0,n)\,\sigma - N(z_2,n)\frac{1}{j+2}}{n} > \frac{n\sigma - n\frac{1}{j+2}}{n} = \sigma - \frac{1}{j+2},$$

also:

$$\frac{C(n)}{n} \geqq \frac{C'(n)}{n} > \sigma - \frac{1}{j+2} \quad \text{für jedes} \quad n \geqq 0.$$

Somit ist:

$$\gamma' = \underline{\operatorname{fin}}\,\frac{C'(n)}{n} \geqq \sigma - \frac{1}{j+2}$$

und Formel (8) mithin aus dem Strukturſatz bewiesen.

Für das Glied $\frac{1}{j+2}$ kann eine Abschätzung durch σ bzw. α und β allein angegeben werden, die im allgemeinen eine Verschlechterung bedeutet:

Nach (6) ist im Fall 2:

$$J(j) = A(j) + B(j) - j = -1, \quad \text{also} \quad j = A(j) + B(j) + 1 \geqq j\sigma + 1 \geqq j(\alpha+\beta) + 1,$$

$$j(1-\alpha-\beta) \geqq j(1-\sigma) \geqq 1,$$

$$j \geqq \frac{1}{1-\sigma} \geqq \frac{1}{1-\alpha-\beta},$$

$$\frac{1}{j+2} \leqq \frac{1}{\frac{1}{1-\sigma}+2} = \frac{1-\sigma}{3-2\sigma} \leqq \frac{1-\alpha-\beta}{3-2(\alpha+\beta)};$$

man hat also noch:

$$\gamma \geqq \gamma' \geqq \sigma - \frac{1-\sigma}{3-2\sigma} \geqq \alpha+\beta - \frac{1-\alpha-\beta}{3-2(\alpha+\beta)}. \tag{11}$$

Mit $\sigma \to 1$ geht offenbar $j \to \infty$, also $\frac{1}{j+2} \to 0$.

Die Abschätzungen (8) und (11) sind bei kleinen Dichten und kleinem j ungeeignet, weil dann $\frac{1}{j+2}$ nicht beliebig klein wird; je größer j ist, um so besser werden diese Abschätzungen, auch bei kleinen α, β.

II. Die Formel (8) läßt sich, wie erst später bewiesen werden kann (S. 12, § 3, II), auf k Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_k$ wie folgt erweitern:

$$A(\mathfrak{C}) \geqq A(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \cdots + \mathfrak{A}_{k-1}) + A(\mathfrak{A}_k) - \frac{1}{j+k} \qquad (k \geqq 2)\ [18]), \tag{12}$$

wobei man j in bezug auf dasjenige Paar $(\mathfrak{A}_\varkappa, \mathfrak{A}_\lambda)$, $1 \leqq \varkappa \neq \lambda \leqq k$, bestimmen darf, das das größte j liefert. Durch mehrfache Anwendung dieser Formel ergibt sich

[17]) Für $n \leqq z_2$ ist ja auf Grund von (10) für $\varkappa = 1$ wegen $\varepsilon = 0$ nichts mehr zu beweisen.

[18]) (12) und (12′) gelten nicht nur für $A(\mathfrak{C}) = \gamma$, sondern schon für die Dichten aller derjenigen Teilmengen von $\mathfrak{C}$, die man erhält, wenn man auf alle möglichen Arten die Summe zweier Mengen jeweils durch die Summe von Vereinigungsmenge und Durchschnitt ersetzt, und wobei noch außerdem an Stelle der Summe der Einzeldichten das jeweils entsprechende σ geschrieben werden darf.

unmittelbar:

$$\gamma \geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k - \frac{1}{j+2} - \frac{1}{j+3} - \cdots - \frac{1}{j+k}. \tag{12'}$$

Aus (12') gewinnt man einen Beweis des Basissatzes (vgl. § 1, I): Nimmt man $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}$ und $\Delta(\mathfrak{A}) = \alpha > 0$, so wird

$$\gamma \geqq \alpha + \sum_{\varkappa=2}^{k} \left(\alpha - \frac{1}{j+\varkappa}\right).$$

Diese Formel gilt für jedes positive ganze k. In $\sum_{\varkappa=2}^{k} \left(\alpha - \frac{1}{j+\varkappa}\right)$ ist $\left(\alpha - \frac{1}{j+\varkappa}\right)$ mit $\varkappa$ monoton wachsend und von einem bestimmten $\varkappa = \varkappa_0$ an sicher positiv. Also kann man in dieser Summe für hinreichend großes k jede positive Zahl, insbesondere die Zahl $1 - \alpha$, überschreiten und erhält dann $\gamma \geqq \alpha + (1-\alpha) = 1$, so daß der Basissatz bewiesen ist. — Es werde bemerkt, daß (5_2) mehr aussagt, wie überhaupt (5_2) für den Fall $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$ bereits die allgemeine Vermutung bestätigt.

III. (8) und (11) gelten, wie bereits gesagt, schon für γ', die Dichte der Teilmenge $\mathfrak{C}' = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}$; es erhebt sich daher naturgemäß die Frage, ob diese durch die Betrachtung von σ bedingte Verschärfung nicht nur eine scheinbare ist, das heißt, ob nicht, wenn $\Delta(\mathfrak{B}) = \varphi$ und $\Delta(\mathfrak{D}) = \delta$ gesetzt wird, stets $\sigma = (\alpha+\beta)_{Max} = \varphi + \delta$ ist. Daß dies nicht notwendig zutrifft, beweist das

Beispiel 7:

$\mathfrak{A} = \{0, 1, 6, 7, 15, 17, 18, \ldots\}$, $\mathfrak{B} = \{0, 7, 16, 17, \ldots\}$:

$\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{2}{15}$, $\alpha+\beta = \frac{1}{3}$, $\sigma = \frac{5}{14}$, $(\alpha+\beta)_{Max} = \frac{12}{35}$,

$\mathfrak{B} = \{0, 1, 6, 7, 15, 16, 17, \ldots\}$, $\mathfrak{D} = \{0, 7, 17, 18, \ldots\}$:

$$\varphi = \frac{1}{5},\ \delta = \frac{2}{16};\ \varphi+\delta = \frac{1}{5} + \frac{2}{16} < \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \alpha+\beta = \frac{1}{3} < \frac{12}{35} = (\alpha+\beta)_{Max} < \frac{5}{14} = \sigma,$$

also fällt hier wirklich

$$\varphi + \delta < \alpha + \beta < (\alpha+\beta)_{Max} < \sigma$$

aus. Für den Fall 1, bei dem ständig $J(n) \geqq 0$ ist, zeigte Beispiel 5, daß aus $J(n) \geqq 0$ nicht $\alpha + \beta \geqq 1$ folgt; Beispiel 5 beweist aber zugleich auch, daß nicht notwendig $(\alpha+\beta)_{Max} \geqq 1$ ist; wie man sofort nachrechnet, ist dort $(\alpha+\beta)_{Max} = \frac{5}{6} < \sigma = 1$. — Daß jedoch auch $\varphi + \delta = \sigma = (\alpha+\beta)_{Max} > \alpha + \beta$ sein kann, beweist das schon weiter oben angeführte Beispiel 6.

IV. Die rechten Seiten in (5_1), (5_2), (5_4) und (11) sind stetige Funktionen der beiden Veränderlichen α, β und in bezug auf jede Veränderliche einzeln monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Funktion

$$g(\alpha, \beta) \begin{cases} = \alpha + \beta, & \text{wenn } \alpha + \beta \leqq 1 \text{ ist,} \\ = 1, & \text{wenn } \alpha + \beta \geqq 1 \text{ ist,} \end{cases} \tag{13}$$

die ja nach § 1, III als die gesuchte Funktion $f(\alpha, \beta)$ vermutet wird [19]). Hierzu werde die auch durch die Beispiele 1, 3 und 6 nahegelegte Ergänzung bewiesen:

[19]) Es scheint bereits $\Delta(\mathfrak{C}') = \Delta(\mathfrak{B} + \mathfrak{D}) = \gamma' \geqq \sigma$ zu gelten.

Für jede in beiden Veränderlichen stetige oder in jeder Veränderlichen einzeln monoton wachsende Funktion $f(\alpha, \beta) \leqq \gamma'$ oder γ gilt stets $f(\alpha, \beta) \leqq g(\alpha, \beta)$ [20]). Analog ist stets $f(\sigma) \leqq \sigma$ [21]).

Beweis: Es seien zunächst α und β rational, wobei $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ und $\alpha + \beta \leqq 1$ genommen werde: $\alpha = \frac{p}{h}$, $\beta = \frac{q}{h}$, also $p \leqq q$ und $p + q \leqq h$. Man bilde die beiden Mengen:

$$\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, \ldots, p-1, p, h+1, h+2, \ldots\},\ \mathfrak{B} = \{0, 1, 2, \ldots, q-1, q, h+1, h+2, \ldots\};$$

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} = \{0, 1, 2, \ldots, p+q-1, p+q, h+1, h+2, \ldots\}.$$

Dann ist: $\alpha = \frac{p}{h}$, $\beta = \frac{q}{h}$, $\sigma = \frac{p+q}{h}$; $\gamma = \gamma' = \frac{p+q}{h} = \sigma = \alpha + \beta$. Für alle rationalen α, β gilt also $f(\alpha, \beta) \leqq g(\alpha, \beta)$; wegen der vorausgesetzten Stetigkeit bzw. Monotonie gilt dasselbe für alle Paare von reellen α, β [22]).

§ 3. Behandlung des Falles 1: $J(n) \geqq 0$ für alle $n \geqq 0$ und Beweis der Iterationsformel.

I. Satz: Wenn $J(n) \geqq 0$ ist für alle $n \geqq 0$, dann ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = \mathfrak{N}$, das heißt: Es ist $\gamma = \gamma' = \sigma = 1$.

Beweis: Die in bezug auf $\mathfrak{N}$ genommene Komplementärmenge der beliebigen Menge $\mathfrak{M}$ werde mit $\overline{\mathfrak{M}}$, ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$ bzw. von $\overline{\mathfrak{M}}$ mit m bzw. $\overline{m}$ bezeichnet [23]). Dann gilt:

$$M(n) + \overline{M}(n) = n. \tag{14}$$

Wegen $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} + \mathfrak{D} \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ genügt es, zu zeigen: $\overline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B} + \mathfrak{D} = \mathfrak{C}'$. Dies ist selbstverständlich, wenn $\overline{\mathfrak{B}}$ leer ist. Ist $\overline{\mathfrak{B}}$ nicht leer und $\bar{v} \in \overline{\mathfrak{B}}$, so gilt offenbar:

$$\overline{V}(\bar{v} - 1) = \overline{V}(\bar{v}) - 1.$$

Aus (9) und (14) erhält man:

$$J(n) = A(n) + B(n) - n = V(n) + D(n) - n = D(n) - \overline{V}(n) \geqq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

letzteres auf Grund der Voraussetzung $J(n) \geqq 0$. Für $n = \bar{v}$ ergibt sich somit:

$$\overline{V}(\bar{v} - 1) = \overline{V}(\bar{v}) - 1 \leqq D(\bar{v}) - 1. \tag{15}$$

Sind jetzt $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_{D(\bar{v})}$ $(1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{D(\bar{v})})$ sämtliche Elemente von $\mathfrak{D}$ aus dem abgeschlossenen Intervall $[1, \bar{v}]$, so bilde man die Differenzen $\bar{v} - d_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, D(\bar{v}))$; diese Differenzen sind also alle nicht größer als $\bar{v} - 1$, das heißt: $\bar{v} - d_\mu \leqq \bar{v} - 1$. Sie sind daher in $[1, \bar{v} - 1]$ enthalten. Die Anzahl der Elemente von $\overline{\mathfrak{B}}$ in

[20]) Ohne Beweis sei erwähnt, daß man sich von den Voraussetzungen über $f(x, y)$ frei machen kann, da sich zu beliebig vorgegebenen (α, β) stets Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so finden lassen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ stets $\gamma' = \gamma < \alpha + \beta + \varepsilon$ und $\alpha + \beta = \sigma$ ist.

[21]) Ebenfalls bei entweder stetigem oder monoton wachsendem $f(x)$.

[22]) Bei vorgegebenem rationalen σ stelle man nur σ als Summe von zwei rationalen Zahlen dar und verfahre wie eben.

[23]) Nach dieser Festsetzung bedeutet beispielsweise $\bar{c}'$ eine positive ganze Zahl, die nicht in $\mathfrak{B} + \mathfrak{D} = \mathfrak{C}'$ also in $\overline{\mathfrak{C}}'$ enthalten ist.

diesem Intervall ist aber nach (15) kleiner als $D(\bar{v})$, das heißt kleiner als die Anzahl der Differenzen $\bar{v}-d_\mu$; mithin gibt es mindestens eine Differenz — sie heiße $\bar{v}-d$ —, die nicht in $\mathfrak{B}$, also in $\mathfrak{V}$ enthalten ist:

$$\bar{v}-d=v,\ \bar{v}=v+d\,.$$

Das bedeutet also wegen $v\in\mathfrak{V}$, $d\in\mathfrak{D}$: $\bar{v}\in\mathfrak{C}'$, womit alles bewiesen ist.

II. Nunmehr kann der Beweis der Formel (12) gegeben werden. Man betrachte zunächst drei Mengen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ und bestimme etwa für die Mengen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ die Zahl $j''=j(\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2)$ der Formel (8). Für alle n mit $0\leqq n\leqq j''-1$ ist $J''(n)=A_1(n)+A_2(n)-n\geqq 0$; also ist nach der eben durchgeführten Schlußweise jedes Element aus $[0,j''-1]$ in $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$ enthalten. Wegen $1\in\mathfrak{A}_3$ und $[0,j''-1]\subset\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$ ist die in bezug auf die beiden Mengen $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ gebildete Funktion $J(n)\geqq 0$ für alle $n\in[0,j'']$; folglich ist $j''\leqq j^*-1$ mit $j^*=j(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_3)$. Nach Formel (8) ist nun $\Delta(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_3)\geqq\Delta(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)+\Delta(\mathfrak{A}_3)-\frac{1}{j^*+2}\geqq\Delta(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2)+\Delta(\mathfrak{A}_3)-\frac{1}{j''+3}$. Die Übertragung auf k Mengen mit $k>3$ ist nunmehr offensichtlich.

§ 4. Der Fall 2: Es gibt ein $n=j$ mit $J(n)=-1$.

I. Bezeichnungen.

Wie bisher wird $\mathfrak{V}=\mathfrak{A}\dotplus\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$, $\mathfrak{V}+\mathfrak{D}=\mathfrak{C}'$ gesetzt, also:

$$\mathfrak{D}\subset\mathfrak{V}\subset\mathfrak{C}'\subset\mathfrak{C}\,.$$

Die komplementären Mengen von $\mathfrak{V}$ in bezug auf $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, also $\mathfrak{S}=\mathfrak{C}-\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{S}'=\mathfrak{C}'-\mathfrak{V}$, mithin $\mathfrak{S}'\subset\mathfrak{S}$. Ferner werde für eine beliebige reelle Zahl r unter $[r]$ wie üblich die größte ganze Zahl g, die r nicht überschreitet, und überdies unter $\langle r\rangle$ die kleinste ganze Zahl g' verstanden, die r nicht unterschreitet:

$$g\leqq r<g+1,\ g'-1<r\leqq g'\,.$$

Daher:

$$\langle r\rangle=-[-r]\,. \tag{16}$$

Durch (16) werden die Rechenregeln für $\langle r\rangle$ auf die hier als bekannt vorausgesetzten Rechenregeln für $[r]$ zurückgeführt. Schließlich sollen die Endpunkte des in § 1, I erklärten Intervalls $\mathfrak{I}$ durch $\underline{i}$ und $\bar{i}$, das heißt unter Benutzung des entsprechenden kleinen lateinischen Buchstabens, bezeichnet werden: $\mathfrak{I}=[\underline{i},\bar{i}]$.

Zunächst werde nun die folgende Definition ausgesprochen:

Definition 5: Unter der Abschnittsdichte $\Delta(\mathfrak{M}_n)=\mu_n$ einer beliebigen Menge $\mathfrak{M}$ versteht man die kleinste der Zahlen $\frac{M(0)}{0}=1,\ \frac{M(1)}{1},\ \ldots,\ \frac{M(n)}{n}$:

$$\Delta(\mathfrak{M}_n)=\mu_n=\operatorname{Min}\left(\frac{M(0)}{0},\frac{M(1)}{1},\ldots,\frac{M(n)}{n}\right)=\underline{\operatorname{fin}}\,\frac{M(\nu)}{\nu}\quad(\nu=0,1,2,\ldots,n)\,. \tag{17}$$

Die Abschnittsdichten bilden, wie aus der Definition sofort hervorgeht, eine monoton abnehmende Folge:

$$1=\mu_0\geqq\mu_1\geqq\cdots\geqq\mu_{n-1}\geqq\mu_n\geqq\mu\qquad(n=0,1,2,\ldots)\,, \tag{18}$$

und es gilt die Formel

$$\mu = \lim \mu_n = \underline{\lim}\, \mu_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{19}$$

entsprechend werde noch $\sigma_n = \operatorname{Min} \frac{A(\nu) + B(\nu)}{\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ erklärt.

II. Der Äquivalenzsatz.

Es sei $f(x)$ eine entweder stetige oder monoton wachsende Funktion von x und $K = K(j)$ eine nur von j abhängige, nichtnegative Größe. Dann folgt aus $\gamma'_n \geqq f(\sigma_n) - K$ für alle $n \geqq 0$ stets $\gamma' \geqq f(\sigma) - K$ für je zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und umgekehrt [24]).

Beweis: I. $f(x)$ ist stetig. Aus der Voraussetzung folgt nach (18) für jedes ganze $n \geqq m$ bei beliebigem nicht negativem ganzen m:

$$\gamma'_m \geqq \gamma'_n \geqq f(\sigma_n) - K,$$

mithin:

$$\overline{\lim_{n \to 0, 1, \ldots}} f(\sigma_n) - K \leqq \gamma'_m$$

und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$:

$$\gamma'_m \geqq f(\sigma) - K \quad \text{für alle} \quad m \geqq 0.$$

Daher nach (19):

$$\gamma' \geqq f(\sigma) - K.$$

Für den Beweis der Umkehrung nehme man die Existenz eines $n = n_0$ an, für das $\gamma'_{n_0} < f(\sigma_{n_0}) - K$ sei. Aus den beiden vorgelegten Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ konstruiere man zwei Mengen $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(1)}$, für die im Gegensatz zur Voraussetzung $\gamma^{(1)\prime} < f(\sigma^{(1)}) - K$ gilt, und zwar nach folgender Vorschrift: Die Menge $\mathfrak{A}^{(1)}$ soll mit $[0, n_0]$ denselben Durchschnitt bilden wie $\mathfrak{A}$ und alle ganzen Zahlen, die größer als n_0 sind, enthalten; entsprechend wird $\mathfrak{B}^{(1)}$ aus $\mathfrak{B}$ erklärt. Weiter ist aber noch $j(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(1)}) = j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = j$; denn aus dem Beweis des § 3 folgt $\gamma'_n = \sigma_n = 1$ für alle $n < j$; daher muß $n_0 \geqq j$ sein, so daß $(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(1)})$ dasselbe j bestimmen wie $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und K mithin konstant bleibt. Also gilt jetzt:

$$\Delta(\mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{D}^{(1)}) = \gamma^{(1)\prime} = \gamma'_{n_0} < f(\sigma_{n_0}) - K = f(\sigma^{(1)}) - K,$$

womit der angekündigte Widerspruch hergestellt ist. Der Beweis der Umkehrung benutzt von der Funktion $f(x)$ weder die Stetigkeit noch die Monotonie und gilt daher auch im zweiten Fall, in welchem somit nur noch der erste Teil zu beweisen ist.

II. $f(x)$ ist monoton wachsend. Aus der Voraussetzung und aus (18) folgt:

$$\gamma'_n \geqq f(\sigma_n) - K \geqq f(\sigma) - K \quad \text{für alle} \quad n \geqq 0,$$

also auch:

$$\gamma' = \lim_{n \to \infty} \gamma'_n \geqq f(\sigma) - K.$$

Der Äquivalenzsatz, dessen Beweis damit abgeschlossen ist, erlaubt die ganze weitere Betrachtung, statt für die Dichten selbst, für die Abschnittsdichten durchzuführen.

[24]) Für den Fall $\alpha = 0$, $\beta \geqq 0$ mit $1 \in \mathfrak{D}$ (von Interesse ist natürlich nur der Fall mit positivem σ) beachte man, daß die Abschnittsdichten α_n, β_n und auch σ_n stets positiv sind; das heißt, daß sich solche Mengen in keinem endlichen Abschnitt von Mengen positiver Dichte unterscheiden lassen. Auf Grund der nach dem Äquivalenzsatz notwendig geltenden Umkehrung gilt mithin $\gamma'_n \geqq f(\sigma_n) - K$ für alle $n \geqq 0$, und also ist nach dem ersten Teil des Satzes, dessen Beweis ja von der Struktur der Mengen unabhängig ist, dann auch $\gamma' \geqq f(\sigma) - K$.

III. Die Maßteilung.

Es wird nun eine Intervallteilung der Menge $\mathfrak{N}$ erklärt, die zum Unterschied von einer noch einzuführenden zweiten Intervalleinteilung Maßteilung heißen möge.

Definition 6: Man setze

$$1-\sigma_n=\vartheta_n \tag{20}$$

und betrachte die Folge der ganzen Zahlen $[0\,\vartheta_0], [1\,\vartheta_1], \ldots, [n\,\vartheta_n], \ldots$ Für diese Folge gilt:

$$0\leqq[(n+1)\,\vartheta_{n+1}]-[n\,\vartheta_n]\leqq 1 \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{21}$$

Beweis: Aus der Monotonie der Abschnittsdichten (vgl. (18)) folgt die Monotonie der ϑ_n:

$$0=\vartheta_0\leqq\vartheta_1\leqq\cdots\leqq\vartheta_n\leqq\vartheta_{n+1}\leqq\vartheta=1-\sigma \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{22}$$

Nach (22) ist $\vartheta_{n+1}\geqq\vartheta_n$. Nun soll ϑ_{n+1} nach oben noch schärfer abgeschätzt werden: Wegen (18) ist entweder $\sigma_{n+1}=\sigma_n$ und folglich $\sigma_{n+1}>\frac{n}{n+1}\sigma_n$, oder $\sigma_{n+1}<\sigma_n$; da dies nach Definition 5 nur für $\sigma_{n+1}=\frac{A(n+1)+B(n+1)}{n+1}$ und mithin $n+1\notin\mathfrak{V}$ eintreten kann, so hat man $A(n+1)+B(n+1)=A(n)+B(n)$ und folglich:

$$\sigma_{n+1}=\frac{A(n)+B(n)}{n+1}\geqq\frac{1}{n+1}\,n\,\sigma_n=\frac{n}{n+1}\sigma_n.$$

Es ist also stets

$$\sigma_{n+1}\geqq\frac{n}{n+1}\sigma_n,\quad \vartheta_{n+1}\leqq 1-\frac{n}{n+1}\sigma_n,$$

$$(n+1)\,\vartheta_{n+1}\leqq n+1-n\,\sigma_n=1+n\,\vartheta_n.$$

$$[(n+1)\,\vartheta_{n+1}]-[n\,\vartheta_n]\leqq[1+n\,\vartheta_n]-[n\,\vartheta_n]=1+[n\,\vartheta_n]-[n\,\vartheta_n]=1.$$

$$[(n+1)\,\vartheta_{n+1}]-[n\,\vartheta_n]=[n\,\vartheta_{n+1}+\vartheta_{n+1}]-[n\,\vartheta_n]$$
$$\geqq[n\,\vartheta_{n+1}]-[n\,\vartheta_n]\geqq[n\,\vartheta_n]-[n\,\vartheta_n]=0.$$

Daher:

$$0\leqq[(n+1)\,\vartheta_{n+1}]-[n\,\vartheta_n]\leqq 1,$$

womit (21) bewiesen ist.

Nunmehr werden die Maßintervalle $\mathfrak{M}_1=[\underline{m}_1,\,\overline{m}_1], \mathfrak{M}_2=[\underline{m}_2,\,\overline{m}_2], \ldots$ als Intervalle mit lauter ganzzahligen Endpunkten erklärt: Zunächst ist

$$\underline{m}_{n+1}-1=\overline{m}_n,$$

so daß nur die $\underline{m}_n$ erklärt zu werden brauchen. Man setze $\underline{m}_1=0$. Es sei $\overline{m}_1$ endlich oder unendlich, je nachdem es ein positives ϑ_n gibt oder nicht. Aus $\vartheta_n=1-\sigma_n=0$ für alle n folgt $\sigma_n=1$, also $\sigma=1$. Das ist nach § 1, IV nur im ersten Falle $J(n)\geqq 0$ für alle n möglich, so daß der Fall $\overline{m}_1=\infty$ hier nicht mehr in Betracht kommt. Mithin ist ϑ_n von einer Stelle an stets positiv; die kleinste positive ganze Zahl, für die $[n\,\vartheta_n]=1$ ist, sei $\underline{m}_2$. Wegen $1\in\mathfrak{V}$ ist $\sigma_1=1$, also $\vartheta_1=[1\,\vartheta_1]=0$; ferner ist $\frac{A(2)+B(2)}{2}\geqq\frac{1+1}{2}=1$, mithin $\sigma_2=1$ und $\vartheta_2=[2\,\vartheta_2]=0$, das heißt $\underline{m}_2\geqq 3$. Offenbar ist sogar $\underline{m}_2=j$. Nach (21) ist nun die Folge $[n\,\vartheta_n]$ monoton wachsend; aber es gilt noch außerdem $[n\,\vartheta_n]\to\infty$ für $n\to\infty$; denn nach (22) ist $(n+k)\,\vartheta_{n+k}\geqq n\,\vartheta_n+k\,\vartheta_n$ und wegen $\vartheta_n>0$ für $n\geqq\underline{m}_2$ gilt $k\,\vartheta_n\to\infty$ für $k\to\infty$. Nunmehr können die $\underline{m}_\nu$ für jedes $\nu\geqq 1$ allgemein

erklärt werden, und zwar sei $\underline{m}_\nu$ die kleinste positive ganze Zahl, für die $[\underline{m}_\nu \vartheta_{\underline{m}_\nu}] = \nu - 1$ ist. Weil $\overline{m}_1$ endlich ist, sind auch alle $\underline{m}_\nu$ und $\overline{m}_\nu$ endlich, das heißt: Es gibt unendlich viele Maßintervalle.

Für die zu den Mengen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ gehörigen Anzahlfunktionen $C(n)$ und $C'(n)$ gelten die unmittelbar einleuchtenden Gleichungen:

$$C(n) = A(n) + B(n) + S(n) - D(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{23}$$

$$C'(n) = A(n) + B(n) + S'(n) - D(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{23'}$$

deren zweite nun umgeformt werde: Nach (16) und (17) ist $A(n) + B(n) \geqq \langle n\,\sigma_n \rangle$; setzt man $V'(n) = A(n) + B(n) - \langle n\,\sigma_n \rangle$, so ist offenbar stets:

$$V'(n) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

Für $V(n)$ erhält man die Formel:

$$V(n) = \langle n\,\sigma_n \rangle + V'(n) - D(n), \tag{25}$$

aus der sich für $C'(n)$ nach (23')

$$C'(n) = \langle n\,\sigma_n \rangle + \{V'(n) + S'(n) - Dn\} \tag{26}$$

ergibt, also:

$$\frac{C'(n)}{n} = \frac{\langle n\,\sigma_n \rangle}{n} + \frac{V'(n) + S'(n) - D(n)}{n}. \tag{26'}$$

Aus den Definitionen und Formeln dieses Abschnitts ergeben sich nun einige Folgerungen.

Folgerung 1: Dann und nur dann gilt $\frac{C'(n)}{n} \geqq \sigma_n$, wenn $\{V'(n) + S'(n) - D(n)\} \geqq 0$ ist $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Beweis: Man nehme an, es sei $\{V'(n) + S'(n) - D(n)\} \leqq -1$; dann ergäbe sich, wenn man noch $\langle n\,\sigma_n \rangle - n\,\sigma_n = \delta$ setzt, wegen $\delta < 1$ auf Grund von (26'):

$$\frac{C'(n)}{n} = \frac{n\,\sigma_n + \delta + \{V'(n) + S'(n) - D(n)\}}{n} < \sigma_n + \frac{1-1}{n} = \sigma_n,$$

also:

$$\frac{C'(n)}{n} < \sigma_n.$$

Damit ist die Notwendigkeit der behaupteten Bedingung bewiesen; das Hinreichen ist unmittelbar aus (26') abzulesen.

Folgerung 2: Aus $\frac{C'(\nu)}{\nu} \geqq \sigma_\nu$ für alle $\nu = 0, 1, \ldots, n$ folgt $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ für jedes $n \geqq 0$.

Beweis: Im Falle $\frac{C'(n)}{n} = \gamma'_n$ ist nichts mehr zu beweisen. Andernfalls ist $\frac{C'(n)}{n} > \gamma'_n$; dazu ist notwendig, daß die Abschnittsdichte γ'_n an einer vorhergehenden Stelle angenommen wird. Ist n_0 eine dieser Stellen, so daß also $\gamma'_{n_0} = \gamma'_n$ und $n_0 < n$ ist, so hat man auf Grund der Voraussetzung und von (18):

$$\gamma'_n = \gamma'_{n_0} = \frac{C'(n_0)}{n_0} \geqq \sigma_{n_0} \geqq \sigma_n.$$

Folgerung 3: Aus $n \in \mathfrak{M}_\nu$ für jedes $\nu \geqq 1$ folgt $[n\,\vartheta_n] = \nu - 1$.

Beweis: Es ist die Folge $[n\,\vartheta_n]$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ nach (21) monoton wachsend; also ist $[n\,\vartheta_n]$ im Innern des Intervalls $\mathfrak{M}_\nu$ konstant. Daraus folgt die Behauptung.

Aus der Folgerung 3 und aus (16) ergibt sich, wenn etwa $n \in \mathfrak{M}_{k+1}$, $k \geqq 0$, ist:

$$\langle n\,\sigma_n \rangle = \langle n - n + n\,\sigma_n \rangle = \langle n + (-n\,\vartheta_n) \rangle = n + \langle -n\,\vartheta_n \rangle = n - [n\,\vartheta_n] = n - k.$$

Mithin:

$$\langle n\,\sigma_n\rangle = n-k \qquad (n\in\mathfrak{M}_{k+1},\ k\geq 0)\,. \tag{27}$$

Daher läßt sich (25) auch in der Form schreiben:

$$V(n) = n-k+V'(n)-D(n) \qquad (n\in\mathfrak{M}_{k+1},\ k\geq 0)\,. \tag{28}$$

Für die Anzahlfunktion $\bar{V}(n)$ der Komplementärmenge $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ erhält man nach (28) und (14)

$$\bar{V}(n) = k+D(n)-V'(n) \qquad (n\in\mathfrak{M}_{k+1},\ k\geq 0)\,, \tag{29}$$

ferner für $C'(n)$ nach (26) und (27)

$$C'(n) = n-k+\{V'(n)+S'(n)-D(n)\} \qquad (n\in\mathfrak{M}_{k+1},\ k\geq 0) \tag{30}$$

und schließlich für die Anzahlfunktion der zugehörigen Komplementärmenge

$$\bar{C}'(n) = k+\{D(n)-V'(n)-S'(n)\} = k-\{V'(n)+S'(n)-D(n)\} \qquad (n\in\mathfrak{M}_{k+1},\ k\geq 0)\,. \tag{31}$$

Aus Folgerung 1, Folgerung 2 und (31) ergibt sich der

Hilfssatz 1: Dann und nur dann gilt $\gamma'_n\geq\sigma_n$ für alle $n\geq 0$, wenn

$$\bar{C}'(n)\leq k,\ n\in\mathfrak{M}_{k+1} \qquad (k\geq 0) \tag{32}$$

für alle $n\geq 0$ ist.

Diese Formel gibt eine obere Schranke für die Anzahl der Elemente bis zum $(k+1)$-ten Maßintervall an, die in der Summenmenge nicht enthalten zu sein brauchen. Nach jedesmaligem Übergang zum nächstfolgenden Intervall darf also immer noch ein weiteres Element in $\mathfrak{C}'$ fehlen; das bedeutet, daß $\gamma'_n<\sigma_n$ erstmalig nicht an einem Intervallanfang gelten kann.

IV. Die J-Intervalle.

Es werde jetzt noch eine zweite Folge von Intervallen mit lauter ganzzahligen Endpunkten erklärt, die genau wie die Maßteilung nur von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ abhängt. Die Intervalle der neuen Einteilung sollen mit $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots$ bezeichnet werden; der Buchstabe $\mathfrak{J}$ wird für beliebige Intervalle freigehalten, also für solche, die nicht notwendig Maß- oder J-Intervalle sind. Die Definition erfolgt mit Hilfe der durch (6) eingeführten Funktion $J(n)$, die nach § 1, IV dem absoluten Betrage nach höchstens um Eins springen kann und nach § 3, I gleich $D(n)-\bar{V}(n)$ ist.

Definition 7: Die Intervalle $\mathfrak{J}_k=[\underline{j}_k, \bar{j}_k]$, $k=1, 2, \ldots$, sollen unmittelbar hintereinander liegen:

$$\underline{j}_{k+1} = \bar{j}_k+1\,. \tag{33}$$

Die Einteilung bricht ab, wenn ein $\bar{j}_k=\infty$ ist; nach (33) sind nur die $\underline{j}_k$ oder die $\bar{j}_k$, $k\geq 1$, zu erklären. Man setze $\underline{j}_1=0$. Im Fall 1 ($J(n)\geq 0$ für alle $n\geq 0$, vgl. § 1, IV) setze man $\bar{j}_1=\infty$. Im Fall 2 (es gibt ein kleinstes $n=j$ mit $J(j)=-1$) wird $\underline{j}_2=j$ gesetzt. Wenn die Anfangspunkte $\underline{j}_1\,\underline{j}_2, \ldots, \underline{j}_k$ mit $k\geq 2$ und damit nach (33) auch die Endpunkte $\bar{j}_1, \bar{j}_2, \ldots, \bar{j}_{k-1}$ erklärt sind, so setze man $\underline{j}_{k+1}=\underline{j}_k+1$, wenn $\underline{j}_k+1\notin\mathfrak{B}$. Im Falle $\underline{j}_k+1\in\mathfrak{B}$ setze man $\bar{j}=\infty$, wenn $D(\underline{j}_k+1, n)-\bar{V}(\underline{j}_k+1, n)\geq 0$ ist für alle

n [25]), andernfalls $\underline{j}_{k+1}$ gleich dem kleinsten n, für das diese Differenz gleich -1 ist. Aus dieser Definition folgt sofort:

$$D(\underline{j}_k+1, n)-\bar{V}(\underline{j}_k+1, n)\geqq 0 \quad \text{für alle} \quad n\in[\underline{j}_k+1, \bar{j}_k]. \tag{34}$$

Für die Länge $N(\mathfrak{J}_k)$ des Intervalls $\mathfrak{J}_k$ gilt offensichtlich: $N(\mathfrak{J}_k)\geqq 1$ für $k\geqq 2$ und $N(\mathfrak{J}_1)\geqq 2$ [26]). Ferner folgt für $k\geqq 2$ aus $N(\mathfrak{J}_k)>1$ und $D(\mathfrak{J}_k)>0$ sogar $N(\mathfrak{J}_k)\geqq 3$.

Auf Grund der Definition der $\underline{j}_k$ und nach (34) gilt:

$$D(\underline{j}_k+1, \bar{j}_k)-\bar{V}(\underline{j}_k+1, \bar{j}_k)=0, \tag{35}$$

was natürlich nur für $\underline{j}_k<\bar{j}_k$ einen Sinn hat. Ersetzt man in (35) das erste Argument durch $\underline{j}_k$, so bleibt für $k\geqq 2$ wegen $\underline{j}_k\in\mathfrak{B}$ offenbar D ungeändert, während $\bar{V}$ um Eins wächst, also: $D(\underline{j}_k, \bar{j}_k)-\bar{V}(\underline{j}_k, \bar{j}_k)=-1$. Für $k=1$ bleiben D und $\bar{V}$ ungeändert, weil $\underline{j}_1=0$ ist und die Null nicht mitgezählt wird. Also gilt:

$$D(\mathfrak{J}_k)=\begin{cases}\bar{V}(\mathfrak{J}_k)-1 & \text{für } k\geqq 2,\\ \bar{V}(\mathfrak{J}_k) & \text{für } k=1.\end{cases}$$

Durch Summation folgt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} D(\mathfrak{J}_k)=\left\{\sum_{\varkappa=1}^{k}\bar{V}(\mathfrak{J}_k)\right\}-(k-1);$$

nach (3) ist $\sum_{\varkappa=1}^{k} D(\mathfrak{J}_\varkappa)=D(0, \bar{j}_k)=D(\bar{j}_k)$, $\sum_{\varkappa=1}^{k}\bar{V}(\mathfrak{J}_\varkappa)=\bar{V}(0, \bar{j}_k)=\bar{V}(\bar{j}_k)$, mithin:

$$\bar{V}(\bar{j}_k)=D(\bar{j}_k)+k-1 \quad \text{für alle} \quad k\geqq 1. \tag{36}$$

Dieselbe Formel gilt nun aber auch für $\underline{j}_k$. Im Falle $\underline{j}_k=\bar{j}_k$ ist das selbstverständlich; für $\underline{j}_k<\bar{j}_k$ subtrahiere man (35) von (36):

$$\bar{V}(\underline{j}_k)=D(\underline{j}_k)+k-1 \quad \text{für alle} \quad k\geqq 1. \tag{37}$$

Man kann auch die Intervallanfänge $\underline{j}_k$ mit Hilfe der Funktion $J(n)=A(n)+B(n)-n=D(n)-\bar{V}(n)$ erklären, die ja nach (37) für $n=\underline{j}_k$ erstmalig den Wert $-(k-1)$ hat. Daher läßt sich $\underline{j}_k$ als die kleinste Zahl definieren, für die $J(n)=-(k-1)$ ist. Man erkennt mühelos die Äquivalenz dieser beiden Definitionen für $\underline{j}_k$.

Die $\mathfrak{J}$-Intervalleinteilungen unterscheidet sich also von der Maßteilung wesentlich dadurch, daß sie abbrechen kann, und sogar nach jedem k-ten Intervall.

Zwischen den beiden Intervalleinteilungen besteht nun die folgende wichtige Beziehung:

Hilfssatz 2: Für jedes $k\geqq 1$, das nicht größer als die Anzahl der $\mathfrak{J}$-Intervalle ist [27]), gilt:

$$\underline{j}_k\geqq \underline{m}_k$$

und folglich nach (33): $\bar{j}_{k-1}\geqq \bar{m}_{k-1}$.

Beweis: Für $k=1$ ist die Behauptung wegen $\underline{j}_1=\underline{m}_1=0$ trivial. Für $k\geqq 2$ nehme man $\underline{j}_k<\underline{m}_k$ an, also $\underline{j}_k\leqq \underline{m}_k-1=\bar{m}_{k-1}$. Ist $\mathfrak{M}_l$ das Maßintervall, in welchem $\underline{j}_k$ liegt, so ist auf Grund der Annahme $l\leqq k-1$ und nach (29):

$$\bar{V}(\underline{j}_k)=l-1+D(\underline{j}_k)-V'(\underline{j}_k)\leqq k-2+D(\underline{j}_k)-V'(\underline{j}_k).$$

[25]) Für $n=\underline{j}_k+1$ ist die Bedingung offenbar erfüllt.

[26]) Man beachte, daß bei $N(\mathfrak{J}_1)$ die Null nicht mitgezählt wird.

[27]) Diese selbstverständliche Einschränkung wird in Zukunft immer weggelassen werden.

Hieraus folgt unter Benutzung von (37):

$$D(j_k)+k-1\leqq k-2+D(j_k)-V'(j_k),$$

mithin:

$$V'(j_k)\leqq -1,$$

was der Formel (24) widerspricht. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Ein weiteres wesentliches Hilfsmittel liefert der

Hilfssatz 3: Für jedes $n\geqq 0$ und jedes $k\geqq 1$ gilt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{n+\varkappa})\leqq 1+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{\varkappa}).$$

Beweis: Für $n=0$ ist die Formel trivial. Nach Folgerung 3 ist:

$$[\bar{m}_{n+k}\,\vartheta_{\bar{m}_{n+k}}]-[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{n+1}}]=n+k-1-(n+1-1)=k-1. \tag{38}$$

Nach (3) und (2) ist weiter:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{n+\varkappa})=N(\underline{m}_{n+1},\,\bar{m}_{n+k})=\begin{cases}\bar{m}_{n+k}-\underline{m}_{n+1}+1 & \text{für}\quad n\geqq 1,\\ \bar{m}_k & \text{für}\quad n=0,\end{cases}$$

also stets $\bar{m}_{n+k}\geqq \underline{m}_{n+1}-1+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{n+\varkappa})$. Nun nehme man an, es sei entgegen der Behauptung dieses Hilfssatzes $\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{n+\varkappa})\geqq 2+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{\varkappa})$; dann liefert (38) in Verbindung mit (22) und den Rechenregeln über die eckige Klammer:

$$\begin{aligned}
k-1&\geqq\left[\left(\underline{m}_{n+1}-1+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{n+\varkappa})\right)\vartheta_{\bar{m}_{n+k}}\right]-[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{n+1}}]\\
&\geqq\left[\left(\underline{m}_{n+1}+1+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{\varkappa})\right)\vartheta_{\bar{m}_{n+k}}\right]-[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{n+1}}]\\
&\geqq[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\bar{m}_{n+k}}]+\left[\left(1+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{\varkappa})\right)\vartheta_{\bar{m}_{n+k}}\right]-[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{n+1}}]\\
&\geqq[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{n+1}}]+[(1+\bar{m}_k)\,\vartheta_{\bar{m}_{n+k}}]-[\underline{m}_{n+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{n+1}}]\geqq[\underline{m}_{k+1}\,\vartheta_{\underline{m}_{k+1}}]=k,\quad n>0,
\end{aligned}$$

womit der Widerspruch hergestellt und der Beweis des Hilfssatzes 3 beendet ist.

Da die rechte Seite des Hilfssatzes 3 auch in der Form $1+\bar{m}_k=\underline{m}_{k+1}$ geschrieben werden kann, so ergibt sich in Verbindung mit Hilfssatz 2:

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{n+\varkappa})\leqq 1+\sum_{\varkappa=1}^{k} N(\mathfrak{M}_{\varkappa})=\underline{m}_{k+1}\leqq \underline{j}_{k+1}\qquad (n\geqq 0,\,k\geqq 1) \tag{39}$$

und insbesondere für $k=1$:

$$N(\mathfrak{M}_{n+1})\leqq 1+N(\mathfrak{M}_1)=\underline{m}_2=\underline{j}_2=j\qquad (n\geqq 0). \tag{40}$$

Für eine später häufig zu verwendende Umformung des Hilfssatzes 3 wird als neuer Begriff der Intervallwechsel eingeführt:

Definition 8: Für ein beliebiges Intervall J versteht man unter der Anzahl der in J erfolgenden Maß- bzw. J-Intervallwechsel die Anzahl der in J liegenden Anfangspunkte von Maß- bzw. J-Intervallen und bezeichnet

sie durch $MW(\mathfrak{I})$ bzw. $JW(\mathfrak{I})$. Die Symbole $MW(n)$ bzw. $JW(n)$ sollen gleich $MW(\mathfrak{I})$ bzw. $JW(\mathfrak{I})$ sein, wenn $\mathfrak{I}=[0,n]$ ist.

Auf diese Anzahlen bezieht sich die neue Form des Hilfssatzes 3:

Hilfssatz 4: Für $n\geqq 0$ und $l\geqq 1$ gilt:

$$MW(n,n+l)\geqq MW(1,l)\geqq JW(1,l).$$

Beweis: Es sei etwa $n\in\mathfrak{M}_{k+1}$, $n+l\in\mathfrak{M}_{k+x}(k\geqq 0)$, $l\in\mathfrak{M}_y$; dann hat man

$$MW(n,n+l)=\begin{cases} x-1, & \text{wenn } n\neq \underline{m}_{k+1},\\ x\ \ \ , & \text{wenn } n=\underline{m}_{k+1}\end{cases}$$

ist, in beiden Fällen also:

$$MW(n,n+l)\geqq x-1.$$

Ferner ist $MW(1,l)=y-1$. Wäre nun $MW(n,n+l)<MW(1,l)$, so hätte man $x-1<y-1$ und folglich $x<y$. Andererseits ist aber insbesondere auf Grund von Hilfssatz 3 für $k>0$:

$$\underline{m}_y\leqq l=n+l-n+1-1\leqq \bar{m}_{k+x}-\underline{m}_{k+1}+1-1=-1+\sum_{\xi=1}^{x}N(\mathfrak{M}_{k+\xi})\leqq\sum_{\xi=1}^{x}N(\mathfrak{M}_\xi)=\bar{m}_x,$$

$$\underline{m}_y\leqq l\leqq n+l\leqq\bar{m}_x\quad\text{für}\quad k=0,$$

mithin immer $\underline{m}_y\leqq\bar{m}_x$ und folglich $y\leqq x$ im Widerspruch zu $x<y$; aus Hilfssatz 2 folgt sofort $MW(1,l)\geqq JW(1,l)$; damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

Ist $j_k\in\mathfrak{M}_l$, also nach dem zweiten Hilfssatz $k\leqq l$, so hat man wegen der nach (37) und (29) geltenden beiden Darstellungen für $\bar{V}(j_k)$:

$$\bar{V}(j_k)=D(j_k)+k-1=l-1+D(j_k)-V'(j_k),$$

mithin:

$$V'(j_k)=l-k,\ j_k\in\mathfrak{M}_l.$$

Ist speziell $k=l$, also $j_k\in\mathfrak{M}_k$, so ist $V'(j_k)=0$. Das ermöglicht den

Hilfssatz 5: Ist $j_k\in\mathfrak{M}_k$, so ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von $\frac{C'(j_k)}{j_k}\geqq\sigma_{j_k}$, daß $S'(j_k)-D(j_k)\geqq 0$ ist.

Beweis: Für $k=1$ ist die Behauptung wegen $S'(0)=D(0)=0$ trivial; für $k>1$ folgt ihre Richtigkeit unmittelbar aus Folgerung 1.

V. Haupt- und Nebenunterintervalle.

Es soll nunmehr die Struktur eines J-Intervalles $\mathfrak{J}_k$ näher untersucht werden. Jedes $\mathfrak{J}_k$ läßt sich nämlich in — echte oder unechte — Unterintervalle aufteilen, wobei sich zwei verschiedene Arten von Unterintervallen ergeben werden. Die eine Art besteht nur aus lauter solchen Unterintervallen, die stets Elemente des Durchschnitts enthalten; diese mögen „Hauptunterintervalle" heißen und mit $\mathfrak{J}_{k1},\mathfrak{J}_{k2},\ldots$ für jedes k bezeichnet werden. Die andere Gattung dagegen besitzt nur solche Unterintervalle, die zu D elementefremd sind; diese Unterintervalle mögen „Nebenunterintervalle" genannt und für jedes k mit $\mathfrak{J}'_{k1},\mathfrak{J}'_{k2},\ldots$ bezeichnet werden.

Definition 9: Gegeben sei ein beliebiges J-Intervall $\mathfrak{J}_k$.

Fall 1: $D(\mathfrak{J}_k)=0$. Dann sei $\mathfrak{J}_k$ zugleich unechtes Nebenunterintervall von $\mathfrak{J}_k$, also: $\mathfrak{J}'_{k1}=\mathfrak{J}_k$.

Fall 2: $D(\mathfrak{J}_k) > 0$. Es sei nun d_{k1} das kleinste Durchschnittselement in $\mathfrak{J}_k$. Da aus der Definition 6 direkt

$$\underline{j}_k \in \bar{\mathfrak{B}} \quad \text{für jedes} \quad k \geq 2 \tag{41}$$

folgt, ist $d_{k1} > \underline{j}_k$, also $d_{k1} - 1 \geq \underline{j}_k$. Das erste Nebenunterintervall werde nun durch

$$\mathfrak{J}'_{k1} = [\underline{j}_k, d_{k1} - 1] = [\underline{j}'_{k1}, \bar{j}'_{k1}]$$

erklärt. Um zum ersten Hauptunterintervall zu gelangen, berücksichtige man, daß $D(d_{k1}, d_{k1}) - \bar{V}(d_{k1}, d_{k1}) = 1 > 0$ ist, und bestimme die kleinste Zahl $n = \bar{j}_{k1}$, für die $D(d_{k1}, \bar{j}_{k1}) - \bar{V}(d_{k1}, \bar{j}_{k1}) = 0$ ist. Dann wird das erste Hauptunterintervall durch

$$\mathfrak{J}_{k1} = [d_{k1}, \bar{j}_{k1}] = [\underline{j}_{k1}, \bar{j}_{k1}]$$

erklärt. Aus dieser Festsetzung folgt also

$$D(\underline{j}_{k1}, n) - \bar{V}(\underline{j}_{k1}, n) > 0 \quad \text{für jedes} \quad n < \bar{j}_{k1}.$$

Ist $\bar{j}_{k1} = \bar{j}_k$, so sei die Unterteilung von $\mathfrak{J}_k$ beendet. Andernfalls bestehen zwei Möglichkeiten:

1. $\bar{j}_k + 1 \notin \mathfrak{D}$: Dann wird das zweite Nebenunterintervall wie folgt definiert: Man setze $\underline{j}'_{k1} = \bar{j}_{k1} + 1$. Ferner sei $\bar{j}'_{k1} \leq \bar{j}_k$ die größte Zahl so, daß für $\mathfrak{J}'_{k2} = [\underline{j}'_{k1}, \bar{j}'_{k2}]$

$$\mathfrak{J}'_{k2}\,\mathfrak{D} = 0$$

ist. Daraus folgt vermittels (34):

$$\mathfrak{J}'_{k2}\,\bar{\mathfrak{B}} = 0, \quad \text{also} \quad \mathfrak{J}'_{k2} \subset \mathfrak{B}.$$

2. $\bar{j}_{k1} + 1 \in \mathfrak{D}$: Hier setze man $\underline{j}_{k2} = \bar{j}_{k1} + 1$. Die weitere Bestimmung von $\mathfrak{J}_{k2}$, also des zweiten Hauptunterintervalls, erfolge genau wie die von $\mathfrak{J}_{k1}$. — Sind nun $\bar{j}'_{k2}$ bzw. $\bar{j}_{k2}$ gleich $\bar{j}_k$, so ist die Unterteilung fertig. Sonst fahre man in gleicher Weise fort. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß zwar zwei Hauptunterintervalle direkt aufeinanderfolgen können, daß dagegen zwischen zwei Nebenunterintervallen, sofern überhaupt wenigstens zwei vorhanden sind, stets mindestens ein Hauptunterintervall liegt. Offenbar ist stets $N(\mathfrak{J}_{k\nu}) \geq 2$.

Aus dieser Definition folgt für jedes Nebenunterintervall mit Ausnahme des ersten:

$$\mathfrak{J}'_{k\nu}\,\mathfrak{D} = 0, \; \mathfrak{J}'_{k\nu}\,\bar{\mathfrak{B}} = 0, \quad \text{mithin:} \quad \mathfrak{J}'_{k\nu} \subset \mathfrak{B} \qquad (\nu \geq 2). \tag{42}$$

Für $\mathfrak{J}'_{k1}$ gilt:

$$\mathfrak{J}'_{k1}\,\mathfrak{D} = 0, \; \mathfrak{J}'_{k1}\,\bar{\mathfrak{B}} = \{\underline{j}_k\}. \tag{43}$$

Für jedes Hauptunterintervall $\mathfrak{J}_{k\nu} \subset \mathfrak{J}_k$ gilt der Definition zufolge:

$$D(\underline{j}_{k\nu}, \bar{j}_{k\nu}) - \bar{V}(\underline{j}_{k\nu}, \bar{j}_{k\nu}) = 0 \tag{44}$$

und

$$D(\underline{j}_{k\nu}, n) - \bar{V}(\underline{j}_{k\nu}, n) > 0 \quad \text{für jedes} \quad n < \bar{j}_{k\nu}. \tag{45}$$

Die Zahlenfolge $\mathfrak{Z} = \{z_0, z_1, \ldots\}$ des bereits eingangs ausgesprochenen „Strukturсatzes" (vgl. § 2, I) ist bestimmt durch die folgende

Definition 10: Hat man die $\mathfrak{J}$-Intervallteilung von $\mathfrak{N}$ und die Weiterteilung in Haupt- und Nebenunterintervalle durchgeführt, so denke man sich sämtliche Hauptunterintervalle der Reihe nach, nach wachsenden Intervallanfängen geordnet, aufgeschrieben. Man setze $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ und bestimme in der Intervallfolge das erste Intervall, dessen Länge größer als $\underline{j}_2$ ist; ist dieses etwa $\mathfrak{J}_{k\nu}$, so soll also $N(\mathfrak{J}_{k\nu}) \geq \underline{j}_2 + 1$ sein. Weiter setze man $z_2 = \underline{j}_{k\nu}$.

Sind nun die Zahlen $z_0, z_1, \ldots, z_n$ bereits bekannt, so fahre man wie folgt fort: Wenn jetzt kein Hauptunterintervall mehr existiert, dessen Anfang größer als z_n und dessen Länge größer als die Länge aller vorhergehenden Hauptunterintervalle ist, so ist die Folge $\mathfrak{Z}$ endlich und besteht nur aus den Zahlen $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Andernfalls sei z_{n+1} der Anfang des ersten Hauptunterintervalls [28]) der Intervallfolge, dessen Anfang größer als z_n und dessen Länge größer als die Länge aller vorhergehenden Hauptunterintervalle ist. Damit ist die Folge $\mathfrak{Z}$ eindeutig festgelegt [29]).

Definition 11: Zwei beliebige Intervalle $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{R}$ heißen zueinander kongruent modulo $(\mathfrak{V}, \mathfrak{D})$, in Zeichen: $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_2 \pmod{\mathfrak{V}, \mathfrak{D}}$, wenn eine beliebige ganze Zahl s existiert so, daß stets die folgenden vier Eigenschaften erfüllt sind:

1. Aus $i_1 \in \mathfrak{I}_1$ folgt $i_1 + s \in \mathfrak{I}_2$;
2. aus $i_1 \in \mathfrak{V}\,\mathfrak{I}_1$ bzw. $i_1 \in \mathfrak{D}\,\mathfrak{I}_1$ folgt $i_1 + s \in \mathfrak{V}\,\mathfrak{I}_2$ bzw. $i_1 + s \in \mathfrak{D}\,\mathfrak{I}_2$;

und umgekehrt:

3. aus $i_2 \in \mathfrak{I}_2$ folgt $i_2 - s \in \mathfrak{I}_1$;
4. aus $i_2 \in \mathfrak{V}\,\mathfrak{I}_2$ bzw. $i_2 \in \mathfrak{D}\,\mathfrak{I}_2$ folgt $i_2 - s \in \mathfrak{V}\,\mathfrak{I}_1$ bzw. $i_2 - s \in \mathfrak{D}\,\mathfrak{I}_1$.

Ist mindestens eine der vier Eigenschaften nicht erfüllt, so heißen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ zueinander inkongruent modulo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{D}$, in Zeichen: $\mathfrak{I}_1 \not\equiv \mathfrak{I}_2 \bmod (\mathfrak{V}, \mathfrak{D})$.

Dieser Kongruenzbegriff ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Reflexivität erkennt man unmittelbar, indem man $s = 0$ setzt; die Symmetrie ist geradezu Definitionsforderung. Die Transitivität ergibt sich folgendermaßen: Es sei etwa $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{I}_2 \equiv \mathfrak{I}_3$; durch $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_2$ möge die Zahl s bestimmt sein, durch $\mathfrak{I}_2 \equiv \mathfrak{I}_3$ die Zahl t. Dann bestätigt man ohne weiteres, daß die Zahl $s + t$ die Kongruenz von $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_3$ erzwingt.

Folgerung 4: Aus $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_2 \pmod{\mathfrak{V}, \mathfrak{D}}$ folgt immer:

1. Ist $i_1 \in \mathfrak{I}_1\,\bar{\mathfrak{V}}$, so ist $i_1 + s \in \mathfrak{I}_2\,\bar{\mathfrak{V}}$; ist $i_2 \in \mathfrak{I}_2\,\bar{\mathfrak{V}}$, so ist $i_2 - s \in \mathfrak{I}_1\,\bar{\mathfrak{V}}$;

2. Ist $\dot{i}_1 \neq 0$ und $\dot{i}_2 \neq 0$ oder $\dot{i}_1 = 0$ und $\dot{i}_2 = 0$, so gilt: $D(\mathfrak{I}_1) = D(\mathfrak{I}_2)$, $V(\mathfrak{I}_1) = V(\mathfrak{I}_2)$ und $\bar{V}(\mathfrak{I}_1) = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$; ist jedoch genau einer der beiden Intervallanfänge, etwa $\dot{i}_2$, gleich Null, so gilt wegen des Nichtmitzählens der Null bei den Anzahlfunktionen offenbar:

$$D(\mathfrak{I}_2) + 1 = D(\mathfrak{I}_1),\ V(\mathfrak{I}_2) + 1 = V(\mathfrak{I}_1) \quad \text{und} \quad \bar{V}(\mathfrak{I}_1) = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)\ [30]).$$

3. $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2)$, wenn $\dot{i}_1 \neq 0$ und $\dot{i}_2 \neq 0$ oder $\dot{i}_1 = \dot{i}_2 = 0$ ist, und, wenn genau einer der beiden Intervallanfänge, etwa $\dot{i}_2$, gleich Null ist, $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2) + 1$.

---

[28]) Bezeichnet man diese jedem $z_\varkappa$ eindeutig zugeordneten Hauptunterintervalle mit $\mathfrak{I}_{z_\varkappa}$, so darf man, wie sich in § 4, VII ergeben wird, im Strukturſatz $\dfrac{\varepsilon}{j+\varkappa}$ durch $\dfrac{\varepsilon}{N(\mathfrak{I}_{z_\varkappa})+1}$ für $\varkappa \geq 2$ ersetzen; insbesondere darf also (8) durch die bessere Abschätzungsformel

$$\gamma \geq \gamma' \geq \sigma - \frac{\varepsilon}{N(\mathfrak{I}_{z_2})+1}$$

ersetzt werden. Für den Fall, daß z_2 gar nicht mehr existiert, sagt der später folgende Satz I (s. § 4, VI) aus, daß dann schon immer $\gamma' \geq \sigma$ gilt.

[29]) Damit ist natürlich nicht gesagt, daß nicht noch andere Folgen mit den Eigenschaften des Strukturſatzes existieren. Sind $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ zwei verschiedene solcher Folgen, so ist auch $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$ eine solche; es interessieren daher nur Verdichtungen von $\mathfrak{Z}$.

[30]) Letzteres, weil ja niemals $0 \in \bar{\mathfrak{V}}$ ist.

Beweis von 1: Wäre $i_1 + s \notin \bar{\mathfrak{B}}$, also $i_1 + s \in \mathfrak{B}$, so würde nach Eigenschaft 4 der Definition aus $i_1 + s \in \mathfrak{I}_2\,\mathfrak{B}$ folgen: $i_1 + s - s = i_1 \in \mathfrak{B}$, entgegen $i_1 \in \bar{\mathfrak{B}}$. Genau so ergibt sich der zweite Teil der Behauptung.

Beweis von 2: Es genügt offenbar, den Beweis unter der Annahme von $i_1 \neq 0$ und $i_2 \neq 0$ zu führen. Addiert man zu allen Elementen von $\mathfrak{I}_1\,\mathfrak{D}$ die Zahl s hinzu, so sollen das ja alles Zahlen aus $\mathfrak{I}_2\,\mathfrak{D}$ sein; folglich ist $D(\mathfrak{I}_2) \geqq D(\mathfrak{I}_1)$; analog erhält man $D(\mathfrak{I}_1) \geqq D(\mathfrak{I}_2)$, mithin $D(\mathfrak{I}_1) = D(\mathfrak{I}_2)$. Auf die gleiche Weise erhält man $V(\mathfrak{I}_1) = V(\mathfrak{I}_2)$ und $\bar{V}(\mathfrak{I}_1) = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$.

Beweis von 3: Aus der ersten Eigenschaft folgt $i_1 + s \in \mathfrak{I}_2$, aus der dritten $i_2 - s \in \mathfrak{I}_1$. Wäre $i_1 + s > i_2$, so wäre $i_2 - s < i_1$, also $i_2 - s \notin \mathfrak{I}_1$ im Widerspruch zu $i_2 - s \in \mathfrak{I}_1$. Daher ist $i_1 + s = i_2$; ebenso findet man $\bar{\imath}_1 + s = \bar{\imath}_2$. Das bedeutet aber nichts anderes als $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2)$.

Definition 12: Zwei Intervalle $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{R}$ heißen zueinander spiegelkongruent modulo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$, in Zeichen $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_2 \pmod{\mathfrak{B}, \mathfrak{D}}$, wenn es eine positive Zahl s gibt so, daß die folgenden sechs Eigenschaften erfüllt sind:

1. Aus $i_1 \in \mathfrak{I}_1$ folgt $s - i_1 \in \mathfrak{I}_2$;
2. aus $i_1 \in \mathfrak{I}_1\,\mathfrak{D}$ folgt $s - i_1 \in \mathfrak{I}_2\,\bar{\mathfrak{B}}$;
3. aus $i_1 \in \mathfrak{I}_1\,\bar{\mathfrak{B}}$ folgt $s - i_1 \in \mathfrak{I}_2\,\mathfrak{D}$;
4. aus $i_2 \in \mathfrak{I}_2$ folgt $s - i_2 \in \mathfrak{I}_1$;
5. aus $i_2 \in \mathfrak{I}_2\,\mathfrak{D}$ folgt $s - i_2 \in \mathfrak{I}_1\,\bar{\mathfrak{B}}$;
6. aus $i_2 \in \mathfrak{I}_2\,\bar{\mathfrak{B}}$ folgt $s - i_2 \in \mathfrak{I}_1\,\mathfrak{D}$.

Der Spiegelkongruenzbegriff ist symmetrisch, da die Symmetrie ja durch die Definition gefordert wird. Reflexivität und Transitivität sind nicht notwendig erfüllt.

Ist mindestens eine der sechs Eigenschaften nicht erfüllt, so heißen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ zueinander nicht spiegelkongruent modulo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$, in Zeichen: $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\not\equiv} \mathfrak{I}_2 \bmod (\mathfrak{B}, \mathfrak{D})$.

Folgerung 5: Wenn $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_2 \bmod \mathfrak{B}, \mathfrak{D})$ ist, so gilt stets:

1. $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2)$, $D(\mathfrak{I}_2) = \bar{V}(\mathfrak{I}_1)$, $D(\mathfrak{I}_1) = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$, wenn $i_1 \neq 0$ und $i_2 \neq 0$ ist; $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2)$, $D(\mathfrak{I}_2) + 1 = \bar{V}(\mathfrak{I}_1)$, $D(\mathfrak{I}_1) + 1 = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$, wenn $i_1 = i_2 = 0$ ist, und $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2) + 1$, $D(\mathfrak{I}_2) + 1 = \bar{V}(\mathfrak{I}_1)$, $D(\mathfrak{I}_1) = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$, wenn genau einer der beiden Intervallanfänge, hier i_2, gleich Null ist.

2. Aus $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_2 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$ folgt $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_3$;

3. aus $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$ folgt $\mathfrak{I}_2 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$;

4. aus der Reflexivität folgt die Transitivität, das heißt: aus $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_2 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$ und $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_1$ folgt $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$ und umgekehrt.

Beweis von 1: Wieder genügt es offenbar, sich auf $i_1 \neq 0$ und $i_2 \neq 0$ zu beschränken. $N(\mathfrak{I}_1) = N(\mathfrak{I}_2)$ erkennt man wie bei 2 in Folgerung 4. Weiter ist $\bar{V}(\mathfrak{I}_2) \geqq D(\mathfrak{I}_1)$ vermittels Eigenschaft 2, ferner $D(\mathfrak{I}_1) \geqq \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$ nach der sechsten Eigenschaft; daher ist $D(\mathfrak{I}_1) = \bar{V}(\mathfrak{I}_2)$. Genau so ergibt sich $D(\mathfrak{I}_2) = \bar{V}(\mathfrak{I}_1)$.

Beweis von 2: $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ mögen etwa s, $\mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{I}_3$ etwa t bestimmen; aus $s - i_1 = i_2$ und $t - i_2 = i_3$ folgt dann $i_1 = s - i_2 = s - t + i_3$. Setzt man abkürzend $s' = -(s - t)$, so ist vermittels s' die erste Kongruenzeigenschaft erfüllt. Subtrahiert man jetzt von s ein Element aus $\mathfrak{I}_1\,\mathfrak{D}$, so erhält man doch ein Element aus $\mathfrak{I}_2\,\bar{\mathfrak{B}}$; subtrahiert man dieses von t, so erhält man ein Element aus $\mathfrak{I}_3\,\mathfrak{D}$; wieder erkennt man vermittels s' die erste Hälfte der zweiten Eigenschaft usw.

Beweis von 3: $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_2$ bestimme die Zahl s, $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$ die Zahl t. Auch hier bestätigt man ohne weiteres, daß $s+t$ die Spiegelkongruenz von $\mathfrak{I}_2$ und $\mathfrak{I}_3$ bedingt.

Beweis von 4: Es sei $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_2 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$ und $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_1$. Dann folgt aus Folgerung 5, 2: $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_3$. Aus $\mathfrak{I}_1 \equiv \mathfrak{I}_3$, $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_1$ folgt dann nach 5, 3: $\mathfrak{I}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{I}_3$. Ganz entsprechend beweist man die Umkehrung.

Zufolge der Definitionseigenschaften 2 und 3 einerseits und 4 und 5 andererseits erkennt man noch die

Folgerung 6: Sind $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ zwei beliebige zueinander spiegelkongruente Intervalle, und ist s die durch diese Spiegelkongruenz bestimmte Zahl, so ist die Spiegelkongruenz hinreichend dafür, daß s weder Element der Summe $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{V} + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{D}$ noch der Summe $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{D} + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{V}$ ist [31]).

Da für den gegenwärtig zu behandelnden Fall nicht ständig $J(n) \geqq 0$ ist, so ist die Länge von $\mathfrak{I}_1$ endlich. Das ermöglicht, das in § 3, I verwendete Beweisprinzip zu verallgemeinern:

Hilfssatz 6: $\mathfrak{I} = [\underline{i}, \bar{\imath}] \subset \mathfrak{N}$ sei ein beliebiges Intervall so, daß $D(\underline{i}, n) - \bar{V}(\underline{i}, n) \geqq 0$ ist für jedes n aus $\mathfrak{I}$. Ist jetzt entweder $\bar{V}(\mathfrak{I}) \leq \bar{V}(\mathfrak{I}_1)\,(= D(\mathfrak{I}_1))$ oder $N(\mathfrak{I}) \leq j_2 (= j)$, so sind alle Elemente von $\mathfrak{I}\,\mathfrak{V}$ darstellbar, das heißt in $\mathfrak{S}'$ enthalten.

Beweis: Aus der allgemeinen Voraussetzung $D(\underline{i}, n) - \bar{V}(\underline{i}, n) \geqq 0$ folgt sofort, wenn man $n = \underline{i}$ setzt: $\underline{i} \in \mathfrak{V}$. Ist $\mathfrak{I}\,\mathfrak{V} = 0$, so ist nichts mehr zu beweisen; andernfalls seien $\bar{v}_{i1}, \bar{v}_{i2}, \ldots, \bar{v}_{il}$ sämtliche Elemente von $\mathfrak{I}\,\mathfrak{V}$. Der Beweis ist nun entsprechend den beiden Voraussetzungen in zwei Teilen zu führen.

Teil I: $1 \leq l \leq \bar{V}(\mathfrak{I}_1)$. Es sei $\bar{v}_{i\nu}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{I}\,\mathfrak{V}$, also: $1 \leq \nu \leq l \leq D(\mathfrak{I}_1)$. Des weiteren mögen $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ die ersten ν Durchschnittselemente aus $[1, \bar{\jmath}_1]$ sein, also $D(d_\nu) = \nu$. Man bilde jetzt die Differenz $\bar{v}_{i\nu} - d_\nu$ und unterscheide die Fälle $\bar{v}_{i\nu} - d_\nu \geqq \underline{i}$ und $< \underline{i}$.

1. $\bar{v}_{i\nu} - d_\nu \geqq \underline{i}$. Man bilde die Differenzen $\bar{v}_{i\nu} - d_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$; diese sind auf Grund der Definition der d_μ sämtlich in $[\underline{i}, \bar{v}_{i\nu} - 1]$ enthalten. Da ihre Anzahl gleich ν, nach Voraussetzung aber $\bar{V}(\underline{i}, \bar{v}_{i\nu} - 1) = \nu - 1$ ist, so ist mindestens eine der Differenzen, etwa $\bar{v}_{i\nu} - d$, in $\mathfrak{I}\,\mathfrak{V}$ enthalten. Ist ihr Wert gleich v, so hat man also: $\bar{v}_{i\nu} - d = v$, $\bar{v}_{i\nu} = v + d$, mithin $\bar{v}_{i\nu} \in \mathfrak{S}'$.

2. $\bar{v}_{i\nu} - d_\nu < \underline{i}$. Nach Voraussetzung ist $D(\underline{i}, \bar{v}_{i\nu}) \geqq \bar{V}(\underline{i}\,\bar{v}_{i\nu}) = \nu$. Sind $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i\nu}$ die ersten ν Durchschnittselemente aus $\mathfrak{I}$, so bilde man die ν Differenzen $\bar{v}_{i\nu} - d_{i\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$. Diese Differenzen sind sämtlich nicht größer als $\bar{v}_{i\nu} - \underline{i}$, also wegen $\bar{v}_{i\nu} - d_\nu < \underline{i}$ sogar kleiner als d_ν. Nach (34) ist für $k = 1$:

$$\bar{V}(1, d_\nu - 1) \leq D(1, d_\nu - 1) = \nu - 1.$$

Somit können nicht alle $\bar{v}_{i\nu} - d_{i\mu}$ in $\mathfrak{I}_1\,\mathfrak{V}$ enthalten sein. Wie im ersten Fall ist daher $\bar{v}_{i\nu} \in \mathfrak{S}'$.

Teil II: $N(\mathfrak{I}) \leq j_2$: Es kann $l > D(\mathfrak{I}_1)$ angenommen werden, da der Fall $l \leq D(\mathfrak{I}_1)$ in Teil I erledigt worden ist. Da ferner das Intervall $\mathfrak{I}' = [\underline{i}, \bar{v}_{iD(J_1)}]$ den Voraussetzungen von Teil I entspricht, so brauchen nur die Elemente $\bar{v}_{i\nu}$ mit $\nu \geqq D(\mathfrak{I}_1) + 1$ in Betracht gezogen zu werden. Ist $\bar{v}_{i\nu}$ ein solches, so bilde man die Differenzen

[31] Dabei ist es hier gleichgültig, ob die Null in den zu summierenden Mengen enthalten ist oder nicht, selbst dann noch, wenn man, um im Sinne der Definition 2 zu bleiben, den in Rede stehenden Mengen die Null als Element hinzufügen würde.

$\bar{v}_{i\nu} - d_{i\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$, wobei die $d_{i\mu}$ wie in Teil I erklärt ſind [32]). Dann iſt wegen $\underline{i} \leqq d_{i\mu} < \bar{\imath}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$:

$$\bar{v}_{i\nu} - d_{i\mu} \leqq \bar{\imath} - \underline{i} = N(\mathfrak{I}) - 1 \leqq \underline{j}_2 - 1 = \bar{\jmath}_1 .$$

Wegen $\nu > \bar{V}(\mathfrak{J}_1) = D(\mathfrak{J}_1)$ können nicht alle ν Differenzen $\bar{v}_{i\nu} - d_{i\mu}$ in $\mathfrak{J}_1 \bar{\mathfrak{V}}$ enthalten ſein. Damit iſt der Hilfsſatz vollſtändig bewieſen.

Iſt insbeſondere $\mathfrak{I} = [\underline{j}_1 + 1, \bar{\jmath}_1] = [1, \bar{\jmath}_1]$, ſo liegt Teil I, 1 aus dem Beweis des Hilfsſatzes 6 vor, da, wie ſofort zu ſehen iſt, wegen $\underline{i} = 1$ die entſprechende Differenz nicht kleiner als $\underline{i}$ ſein kann; daher gilt:

Folgerung 7: Es iſt ſtets $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{C}'$, alſo $\gamma'_n = \sigma_n = 1$ für jedes n aus $\mathfrak{J}_1$.

Dieſes ſpezielle Ergebnis iſt offenbar auch unmittelbar aus § 3, I zu erſehen und beim Beweis der Iterationsformel (§ 3, II) auch bereits verwendet worden.

Hilfsſatz 6 ermöglicht es nun, die erſte Gattung der hinreichenden Bedingungen anzugeben.

VI. Die hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit von $\gamma' \geqq \sigma$.

Satz I: Iſt für jedes Hauptunterintervall $\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}$ entweder $D(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}) \leqq D(\mathfrak{J}_1)$ oder die Länge $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}) \leqq j = \underline{j}_2$, ſo gilt ſtets $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ für jedes $n \geqq 0$, nach dem Äquivalenzſatz alſo auch $\gamma' \geqq \sigma$.

Beweis: Die Hauptunterintervalle von $\mathfrak{J}_1 (N(\mathfrak{J}_1) \leqq \infty)$ erfüllen trivialerweiſe ſogar ſtets beide Bedingungen. Der Fall $N(\mathfrak{J}_1) = \infty$ iſt, wie ſchon früher geſagt, in § 3 erledigt worden. Beſitzt zunächſt nur $\mathfrak{J}_1$ Hauptunterintervalle, ſo iſt offenbar $\mathfrak{J}_k \mathfrak{D} = 0$ für jedes $k \geqq 2$. Für jedes $n \geqq \bar{\jmath}_1$ iſt dann $D(n) = D(\bar{\jmath}_1) = \bar{V}(\mathfrak{J}_1) = S'(\mathfrak{J}_1)$, letzteres nach Folgerung 7. Wegen $S'(n) \geqq S'(\bar{\jmath}_1)$ iſt $S'(n) - D(n) \geqq S'(\bar{\jmath}_1) - D(\bar{\jmath}_1) = 0$. Aus (23′) erhält man nun:

$$\frac{C'(n)}{n} = \frac{A(n) + B(n)}{n} + \frac{S'(n) - D(n)}{n} \geqq \sigma_n \quad \text{für jedes} \quad n \geqq \underline{j}_1 .$$

In Verbindung mit den Folgerungen 7 und 2 iſt daher $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ für alle $n \geqq 0$. — Iſt andernfalls $\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}$, $\varkappa \geqq 2, \nu \geqq 1$, ein beliebiges Hauptunterintervall, ſo iſt zufolge (44) und (45) der Hilfsſatz 6 auf $\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}$ anwendbar, alſo $\mathfrak{J}_{\varkappa\nu} \bar{\mathfrak{V}} \subset \mathfrak{S}'$. Nach (44) iſt daher $S'(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}) = \bar{V}(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}) = D(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu})$. Bezeichnet für den Augenblick $\mathfrak{N}_\varkappa$ die Vereinigungsmenge aller Nebenunterintervalle von $\mathfrak{J}_\varkappa$, ſo iſt ja nach deren Definition

$$\mathfrak{N}_\varkappa [\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{\jmath}_\varkappa] \bar{\mathfrak{V}} = \mathfrak{N}_\varkappa \mathfrak{D} = 0 .$$

Wendet man Hilfsſatz 6 jetzt auf alle Hauptunterintervalle von $\mathfrak{J}_\varkappa$ an, ſo erhält man durch Summation über ν:

$$S'(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq S'(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{\jmath}_\varkappa) = \bar{V}(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{\jmath}_\varkappa) = D(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{\jmath}_\varkappa) = D(\mathfrak{J}_\varkappa) ,$$

alſo:

$$S'(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq D(\mathfrak{J}_\varkappa) .$$

Dieſe letzte Beziehung iſt nun aber für jedes $\varkappa$ richtig; denn iſt $N(\mathfrak{J}_\varkappa) = 1$, ſo iſt $S'(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq D(\mathfrak{J}_\varkappa) = 0$ evident; iſt aber $N(\mathfrak{J}_\varkappa) > 1$, liegen jedoch in $\mathfrak{J}_\varkappa$ keine Hauptunterintervalle, ſo gilt ebenfalls $S'(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq D(\mathfrak{J}_\varkappa) = 0$, und mehr als die drei eben beſprochenen

[32]) Wegen $\bar{V}(\underline{i}, \bar{v}_{i\nu}) \leqq D(\underline{i}, \bar{v}_{i\nu})$ ſind ſicher wenigſtens ν Durchſchnittselemente in $[\underline{i}, \bar{v}_{i\nu} - 1]$ vorhanden.

Möglichkeiten bestehen offensichtlich nicht. Somit gewinnt man schließlich noch:

$$\mathfrak{B}[\underline{j}_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa]\subset\mathfrak{S}',\ N(\mathfrak{J}_\varkappa)\geqq 2 \qquad (\varkappa\geqq 1). \tag{46}$$

Mithin gilt für jedes $k>1$:

$$C'(\underline{j}_k)=V(\underline{j}_k)+D(\underline{j}_k)+S'(\underline{j}_k,\underline{j}_k)+\sum_{\varkappa=1}^{k-1}\{S'(\mathfrak{J}_\varkappa)-D(\mathfrak{J}_\varkappa)\}$$
$$\geqq V(\underline{j}_k)+D(\underline{j}_k)+S'(\underline{j}_k,\underline{j}_k)\geqq V(\underline{j}_k)+D(\underline{j}_k).$$

Daher ist

$$\frac{C'(\underline{j}_k)}{\underline{j}_k}\geqq\sigma_{\underline{j}_k}\quad\text{für jedes}\quad k\geqq 2$$

und wegen $\underline{j}_1=0$ trivialerweise auch für $k=1$ gültig. Da auf Grund von (46) die Beziehung

$$\frac{C'(\bar{j}_\varkappa)}{\bar{j}_\varkappa}\geqq\frac{C'(\bar{j}_\varkappa-1)}{\bar{j}_\varkappa-1}\geqq\cdots\geqq\frac{C'(\underline{j}_\varkappa)}{\underline{j}_\varkappa}\geqq\sigma_{\underline{j}_\varkappa}\geqq\sigma_{\underline{j}_\varkappa+1}\geqq\cdots\geqq\sigma_{\bar{j}_\varkappa}$$

besteht, so gilt für alle $n\geqq 0$:

$$\frac{C'(n)}{n}\geqq\sigma_n,$$

nach Folgerung 2 also auch $\gamma_n'\geqq\sigma_n$ für alle $n\geqq 0$, womit Satz I bewiesen ist.

Zu Satz I sollen noch die folgenden drei Bemerkungen gemacht werden:

Bemerkung 1: Die Voraussetzungen des Satzes I sind offenbar insbesondere erfüllt, wenn die Intervalle $[\underline{j}_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa]$ selbst schon den dort angegebenen Bedingungen genügen, was man mitunter aus der Stärke des Abnehmens der Funktion $J(n)$ erschließen kann.

Bemerkung 2: Die Voraussetzungen des Satzes I sind stets erfüllt, wenn mit keinem Element d des Durchschnitts $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch $d+1$ zu $\mathfrak{B}$ gehört, das heißt: aus $d\in\mathfrak{D}$ folgt $d+1\notin\mathfrak{B}$. Es genügt jedoch schon, dies nur für diejenigen d zu fordern, die nicht zu $\mathfrak{J}_1$ gehören.

Ist dann nämlich $n\in\mathfrak{D}$, so ist offenbar $[n, n+1]$ Hauptunterintervall, und es ist $N(n, n+1)=2\leqq\underline{j}_2$.

Bemerkung 3: Auf Grund der Definition 10 ist vermittels Satz I der Strukturſatz für das Intervall $[z_0, z_2]=[0, z_2]$ bereits bewiesen.

Hilfssatz 7: Für jedes $\mathfrak{J}_\varkappa$ mit $N(\mathfrak{J}_\varkappa)\geqq 2$ ist stets

$$\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa+1, n)\leqq MW\big(1, \operatorname{Max}(1, N(\underline{j}_\varkappa+1, n)-1)\big)\leqq MW(\underline{j}_\varkappa+1, n)\ ^{33})$$

für jedes $n\in[\underline{j}_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa]$, insbesondere also auch, wenn $N(\mathfrak{J}_\varkappa)=\infty$ ist.

Beweis: Enthält $\mathfrak{J}_\varkappa$ keine Hauptunterintervalle, so ist wegen $[\underline{j}_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa]\,\mathfrak{B}=0$ auch $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa)=0$, der Hilfssatz 7 also für solche $\mathfrak{J}_\varkappa$ bereits bewiesen; desgleichen aber auch, wenn nur Hauptunterintervalle in $\mathfrak{J}_\varkappa$ liegen, die den Bedingungen des Hilfssatzes 6 oder, was dasselbe ist, den Forderungen des Satzes I genügen; denn auch dann ist ja $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa+1, n)=0$. Nach Folgerung 7 ist ferner noch $\bar{C}'(\mathfrak{J}_1)=\bar{C}'(\mathfrak{M}_1)=0$. Es bleibt also noch der Fall übrig, daß in $\mathfrak{J}_\varkappa$ $(\varkappa\geqq 2)$ wenigstens ein Hauptunterintervall, etwa $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$, vorhanden ist so, daß sowohl $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\geqq\underline{j}_2+1$ als auch $D(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\geqq D(\mathfrak{J}_1)+1$ ist [34]). Betrachtet man alle in $\mathfrak{J}_\varkappa$ liegenden Hauptunterintervalle mit diesen Eigenschaften, und

---

[33]) Da für $n=\underline{j}_\varkappa+1$ sich $N(\underline{j}_\varkappa+1, \underline{j}_\varkappa+1)-1=0$ ergeben würde, $MW(1, 0)$ aber nicht definiert ist, so muß das zweite Argument in der Gestalt $\operatorname{Max}(1, N-1)$ geschrieben werden.

[34]) Ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, so ist immer gleichzeitig $N(\mathfrak{J})\leqq\underline{j}_2$ und $D(\mathfrak{J})\leqq D(\mathfrak{J}_1)$ oder keins von beiden wegen $A(x, y)=B(x, y)=D(x, y)=V(x, y)$. — Vgl. auch noch Beispiel 8 am Schluß von § 4, VI.

ist wieder $\bar{C}'(j_\varkappa+1, n)=0$, so ist noch immer nichts zu beweisen. Andernfalls mögen $\mathfrak{J}_{\varkappa 1}, \mathfrak{J}_{\varkappa 2}, \ldots$ der Reihe nach sämtliche Hauptunterintervalle aus $\mathfrak{J}_\varkappa$ sein, für die $\bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\neq 0$ $(\lambda=1, 2, \ldots)$ gilt; ihre Anzahl kann endlich oder unendlich sein. Zunächst betrachte man nur ein einziges dieser Intervalle, etwa $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa\geqq 2, \lambda\geqq 1)$. $\bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 2}, \ldots$ mögen der Reihe nach alle Elemente aus $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}\bar{\mathfrak{C}}'$ sein, so daß also $\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho})=\varrho$ für alle $\varrho=1, 2, \ldots$ ist. Aus $\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}\in\bar{\mathfrak{C}}'$ folgt [35] $(\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{\varkappa\lambda})\in\bar{\mathfrak{B}}$ für jedes ϱ. Man setze

$$\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{\varkappa\lambda}=\bar{v}_\varrho,$$

und es sei etwa $\bar{v}_\varrho\in\mathfrak{J}_{k_\varrho}$. Nach Hilfssatz 6 ist dann $k_\varrho\geqq 2$. Nunmehr nehme man $\bar{v}_\varrho>j_{k_\varrho}$ an. Dann ist nach (34)

$$D(j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho)\geqq\bar{V}(j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho); \tag{47}$$

weiter folgt aus $\bar{v}_\varrho\geqq j_{k_\varrho}+1$ und aus $\bar{j}_{\varkappa\lambda}\geqq\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}$:

$$\bar{j}_{\varkappa\lambda}>\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1\geqq\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-\bar{v}_\varrho=j_{\varkappa\lambda}.$$

Nach (45) ist daher

$$D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1)>\bar{V}(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1). \tag{48}$$

Ist d ein beliebiges Element aus $[j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho]\mathfrak{D}$, so ist notwendig

$$(\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-d)\in[j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1]\bar{\mathfrak{B}}.$$

Das erfordert:

$$\bar{V}(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1)\geqq D(j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho). \tag{49}$$

Genau so muß für die d aus $[j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1]\mathfrak{D}$ gelten:

$$(\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-d)\in[j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho]\bar{\mathfrak{B}};$$

das bedingt:

$$\bar{V}(j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho)\geqq D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1). \tag{50}$$

Insgesamt liefern (47) bis (50) somit:

$$\begin{aligned}D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1)\leqq\bar{V}(j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho)\leqq D(j_{k_\varrho}+1, \bar{v}_\varrho)\\ \leqq\bar{V}(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1)<D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1).\end{aligned}$$

Durch Vergleichung von Anfangs- und Endglied kommt man auf den Widerspruch: $D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1)<D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{k_\varrho}-1)$. Mithin ist:

$$\bar{v}_\varrho=\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}-j_{\varkappa\lambda}=j_{k_\varrho}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}\in\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}\bar{\mathfrak{C}}';\ 2\leqq k_1<k_2<\cdots;\ k_\varrho\geqq\varrho+1\quad(\varrho=1, 2, \ldots). \tag{51}$$

Da sich nunmehr das Intervall $[j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}]$ auch in der Form $[j_{\varkappa\lambda}, j_{\varkappa\lambda}+j_{k_\varrho}]$ schreiben läßt, so erhält man in Verbindung mit Hilfssatz 4:

$$\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho})=\varrho\leqq k_\varrho-1=JW(1, j_{k_\varrho})\leqq MW(1, j_{k_\varrho})\leqq MW(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}).$$

Ohne weiteres gilt dann auch:

$$\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n)\leqq JW(1, n-j_{\varkappa\lambda})\leqq MW(1, n-j_{\varkappa\lambda})\leqq MW(j_{\varkappa\lambda}, n)\ \text{für jedes}\ n\in\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}. \tag{52}$$

Die Verallgemeinerung auf das ganze Intervall $[j_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa]$ ist nun einfach. Es sei n eine beliebige Zahl aus $[j_\varkappa+1, \bar{j}_\varkappa]$; es bezeichne für den Augenblick $\mathfrak{N}_n$ die, eventuell leere, Vereinigungsmenge aller Elemente von Nebenunterintervallen aus $[j_\varkappa+1, n]$. Ist $j_{\varkappa 1}\geqq n$,

[35] Man beachte, daß nach Definition stets $j_{\varkappa\lambda}\in\mathfrak{D}$ ist.

so ist ja $\bar{C}'(j_\varkappa+1, n)=0$. Andernfalls seien $j_{\varkappa 1}, j_{\varkappa 2}, \ldots, j_{\varkappa l}$ $(l \geqq 1)$ alle in $[j_\varkappa+1, n]$ gelegenen, zu Beginn dieses Beweises definierten Hauptunterintervallanfänge.

1. $n \in \mathfrak{R}_n$: Dann ist

$$\begin{aligned}\bar{C}'(j_\varkappa+1, n) &= \bar{C}'(\mathfrak{R}_n)+\sum_{\lambda=1}^{l}\bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) = 0+\sum_{\lambda=1}^{l}\bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} MW(1, N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})-1)\\ &\leqq MW(1, N(\mathfrak{J}_{\varkappa 1})-1)+\sum_{\lambda=1}^{l-1} MW\left\{\sum_{\nu=1}^{\lambda} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu}), \left(\sum_{\nu=1}^{\lambda+1} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\nu})\right)-1\right\}\\ &= MW\left(1, \left\{\sum_{\lambda=1}^{l} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\right\}-1\right) \leqq MW(1, N(j_\varkappa+1, n)-1) \leqq MW(j_\varkappa+1, n),\end{aligned}$$

wobei $\sum_{\lambda=1}^{l-1}$ durchweg gleich Null zu setzen ist, wenn $l=1$ ist.

2. $n \in \mathfrak{J}_{\varkappa l}$: Dann ist

$$\begin{aligned}\bar{C}'(j_\varkappa+1, n) &= \bar{C}'(\mathfrak{R}_n)+\bar{C}'(j_{\varkappa l}, n)+\sum_{\lambda=1}^{l-1}\bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\\ &\leqq MW\left(1, \left\{\sum_{\lambda=1}^{l-1} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\right\}-1\right)+MW(1, N(j_{\varkappa l}, n)-1)\\ &\leqq MW\left(1, \left\{\sum_{\lambda=1}^{l-1} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\right\}-1\right)+MW\left(\sum_{\lambda=1}^{l-1} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}), \left\{\sum_{\lambda=1}^{l-1} N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})\right\}+N(j_{\varkappa\lambda}, n)-1\right)\\ &\leqq MW(1, N(j_\varkappa+1, n)-1) \leqq MW(j_\varkappa+1, n).\end{aligned}$$

Wieder ist $\sum_{\lambda=1}^{l-1}$ gleich Null zu setzen, wenn $l=1$ ist. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hilfssatz 7 läßt sich noch verschärfen zu dem

Hilfssatz 8: Ist in einem Hauptunterintervall $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$

$$j_{\varkappa\lambda}+j_2=\bar{c}'_{\varkappa\lambda 1},$$

dann ist:

$$j_{\varkappa\lambda}+j_2=\bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}=\bar{j}_{\varkappa\lambda}, \quad \text{also:} \quad N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})=j_2+1 \quad \text{und} \quad \bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})=1.$$

Ist jedoch $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})>j_2+1$, dann ist:

$$\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n) \leqq MW(1, N(j_{\varkappa\lambda}, n)-1)-1 \leqq MW(j_{\varkappa\lambda}, n)-1 \text{ für } n \geqq j_{\varkappa\lambda}+j_2 \quad (n \in \mathfrak{J}_\varkappa).$$

Beweis: Es ist nach (36) für $k=1$:

$$\bar{V}(\mathfrak{J}_1)=D(\mathfrak{J}_1)=D(j_2).$$

Nach (45) ist

$$\bar{V}(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1) < D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1).$$

Ist d ein beliebiges Element von $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{D}$, so muß $(\bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-d) \in [j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1]\,\mathfrak{B}$ sein; daher ist weiter:

$$\bar{V}(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1) \geqq D(j_2).$$

Analog gewinnt man:

$$\bar{V}(j_2) \geqq D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1).$$

Insgesamt ergibt sich:

$$D(j_2) \leqq \bar{V}(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1) < D(j_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}-1) \leqq \bar{V}(j_2) = D(j_2)+1.$$

Beachtet man, daß $\bar{c}'_{\varkappa\lambda 1} \in \bar{\mathfrak{B}}$ ist, so liefert die letzte Beziehung:

$$D(\underline{j}_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1} - 1) = \bar{V}(\underline{j}_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1} - 1) + 1 = \bar{V}(\underline{j}_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}) = D(\underline{j}_{\varkappa\lambda}, \bar{c}'_{\varkappa\lambda 1}).$$

Daher muß nach (44) und (45):

$$\bar{c}'_{\varkappa\lambda 1} = \bar{j}_{\varkappa\lambda}$$

sein. Damit ist der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen. Für das weitere genügt die Feststellung, daß nun in (51)

$$2 < k_1 < k_2 < \cdots < k_\varrho < \cdots$$

gilt, also: $k_\varrho \geqq \varrho + 2$ für $\varrho = 1, 2, \ldots$ Genau wie im Anschluß an (51) erhält man den zweiten Teil der Behauptung.

Hilfssatz 9: Für jedes $\mathfrak{J}_\varkappa$ mit $\varkappa \geqq 2$, dessen Länge nicht kleiner als $\underline{j}_2$ ist, also: $N(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq \underline{j}_2$, gilt auch noch:

$$\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, \underline{j}_{\varkappa+1}) \leqq MW(\underline{j}_\varkappa + 1, \underline{j}_{\varkappa+1});$$

allgemeiner gilt, wenn $\bar{c}'$ das erste Element hinter $\bar{j}_\varkappa$ aus $\bar{\mathfrak{C}}'$, wenn also $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{c}') = \bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{j}_\varkappa) + 1$ ist:

$$\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, n) \leqq MW(\underline{j}_\varkappa + 1, n) \quad \text{für jedes} \quad n \in [\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{c}'].$$

Beweis: Da offenbar $\bar{c}' \geqq \underline{j}_{\varkappa+1}$ ist, braucht nur die Aussage über $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, n)$ bewiesen zu werden. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{c}') = 1$: Es soll zunächst gezeigt werden, daß $\underline{j}_\varkappa$ und $\underline{j}_{\varkappa+1}$ nicht demselben Maßintervall angehören können, daß also, wenn das $\underline{j}_\varkappa$ enthaltende Maßintervall mit $\mathfrak{M}_l$ bezeichnet wird, die Annahme $\underline{j}_{\varkappa+1} \in \mathfrak{M}_l$ zu einem Widerspruch führt. Unter dieser Annahme wäre $N(\mathfrak{M}_l) \geqq N(\underline{j}_\varkappa, \underline{j}_{\varkappa+1}) = N(\mathfrak{J}_\varkappa) + 1 \geqq \underline{m}_2 + 1$; nach (40) ist aber $N(\mathfrak{M}_l) \leqq \underline{m}_2$. Damit ist der Widerspruch hergestellt. Es muß also $\underline{m}_{l+1} \in [\underline{j}_\varkappa + 1, \underline{j}_{\varkappa+1}]$ und folglich $MW(\underline{j}_\varkappa + 1, \underline{j}_{\varkappa+1}) \geqq 1$ sein, das heißt:

$$\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{c}') \leqq MW(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{c}').$$

2. $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa + 1, \bar{c}') \geqq 2$: $\mathfrak{J}_{\varkappa l}$ sei das letzte Hauptunterintervall, das heißt dasjenige mit größter Anfangszahl, für das $\bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa l}) \neq 0$ ist. Ist nun $\bar{c}'_{\varkappa l r}$ das größte Element aus $\mathfrak{J}_{\varkappa l} \bar{\mathfrak{C}}'$, so folgt aus (51):

$$\bar{c}'_{\varkappa l r} - \underline{j}_{\varkappa l} = \underline{j}_{k_r} \qquad (k_r \geqq r + 1, r \geqq 1).$$

Ist jetzt

$$\bar{c}' - \underline{j}_{\varkappa l} = \bar{v} = \underline{j}_k \qquad (k > k_r, k \geqq r + 2),$$

so führen dieselben Überlegungen, die im Anschluß an (51) angestellt worden sind, zum Ziel. Andernfalls sei wieder $\bar{c}' - \underline{j}_{kl} = \bar{v} \in \mathfrak{J}_k$ $(k \geqq k_r)$; ist $k > k_r$, so ist $\bar{v} \geqq \underline{j}_k$, und der Beweis verläuft wie eben, wo $\bar{v} = \underline{j}_k$, $k > k_r$ war. Es sei also $k = k_r$. Wegen $\bar{c}'_{klr} - \underline{j}_{\varkappa l} = \underline{j}_{k_r} = \underline{j}_k$ ist dann $\bar{c}' - \underline{j}_{kl} = \bar{v} > \underline{j}_k$. Wäre nun $(\bar{c}' - \underline{j}_k) \in \mathfrak{J}_{\varkappa l}$, also $\bar{c}' - \underline{j}_k - 1 < \bar{j}_{\varkappa l}$, so lassen sich wieder die Formeln (47) bis (50) aufstellen, wobei nur k_ϱ durch k, $\bar{v}_\varrho$ durch $\bar{v}$, $\bar{c}'_{\varkappa\lambda\varrho}$ durch $\bar{c}'$, $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ durch $\mathfrak{J}_{\varkappa l}$ zu ersetzen sind. Der sich demzufolge ergebende Widerspruch verlangt also $\bar{c}' - \underline{j}_k > \bar{j}_{\varkappa l}$. Daher ist:

$$\bar{c}' - \bar{c}'_{\varkappa l r} = (\bar{c}' - \underline{j}_k) - (\bar{c}'_{\varkappa l r} - \underline{j}_k) \geqq \bar{j}_{\varkappa l} - \underline{j}_{\varkappa l} + 1 = N(\mathfrak{J}_{\varkappa l}).$$

Aus $\bar{C}'(\mathfrak{J}_{\varkappa l}) \neq 0$ folgt aber $N(\mathfrak{J}_{\varkappa l}) \geqq \underline{j}_2 + 1$. Mithin ist $\bar{c}' - (\bar{c}'_{\varkappa l r} + 1) \geqq \underline{j}_2$. Also hat man:

$$\bar{C}'(\bar{c}'_{\varkappa l r} + 1, \bar{c}') = 1 = MW(1, \underline{j}_2).$$

In Verbindung mit den Hilfssätzen 4 und 7 erhält man nun

$$\begin{aligned}\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}') &= \bar{C}'(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}'_{\varkappa lr})+\bar{C}'(\bar{c}'_{\varkappa lr}+1,\bar{c}')\\ &\leqq MW(1,N(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}'_{\varkappa lr})-1)+MW(N(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}'_{\varkappa lr}),N(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}'_{\varkappa lr})+\underline{j}_2)\\ &\leqq MW(1,N(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}')-1)\leqq MW(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}'),\end{aligned}$$

womit der Hilfssatz 9 bewiesen ist.

Bemerkung 4: Im Fall 1 des Beweisganges von Hilfssatz 9 gilt wegen $N(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}')-1 \geqq N(\underline{j}_\varkappa+1,\underline{j}_{\varkappa+1})-1=\underline{j}_2-1=\bar{j}_1$ nicht mehr $\bar{C}'(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c})\leqq MW(1,N(\underline{j}_\varkappa+1,\bar{c}')-1)$, wenn sowohl $\bar{c}'=\underline{j}_{\varkappa+1}$ als auch $N(\mathfrak{I}_\varkappa)=\underline{j}_2$ ist, und nur dann nicht. Trotzdem gilt hier wegen $[\underline{j}_\varkappa+1,\bar{j}_\varkappa]\subset\mathfrak{C}'$ immer noch:

$$\frac{C'(\underline{j}_\varkappa+1,\underline{j}_{\varkappa+1})}{N(\underline{j}_\varkappa+1,\underline{j}_{\varkappa+1})}=\frac{C'(\underline{j}_\varkappa+1,\underline{j}_{\varkappa+1})}{\underline{j}_2}=\frac{\underline{j}_2-1}{\underline{j}_2}=\sigma_{\underline{j}_2}.$$

Hilfssatz 7 gibt nun die Möglichkeit, den Satz I etwas zu verallgemeinern, und zwar für den Fall, daß nur endlich viele $\mathfrak{I}$-Intervalle vorhanden sind. Es genügt nämlich, die dortigen Intervalleigenschaften nur für diejenigen Hauptunterintervalle $\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda}$ zu fordern, für die $N(\mathfrak{I}_\varkappa)$ endlich ist. Denn ist etwa $\mathfrak{I}_u$ unendlich lang, so ist nach Satz I zunächst nur: $\frac{C'(m)}{m}\geqq\sigma_m$ für alle $m\leqq\underline{j}_u$, wofür sich, wenn etwa $m\in\mathfrak{M}_{\mu+1}$ ist, nach Hilfssatz 1 auch schreiben läßt:

$$(53)\qquad \bar{C}'(m)\leqq\mu=MW(1,m_{\mu+1})=MW(1,m)\qquad(\underline{m}\leqq\underline{j}_u,\ m\in\mathfrak{M}_{\mu+1}).$$

Ist nun $n\geqq\underline{j}_u+1$, aber sonst beliebig, dann ist nach Hilfssatz 7:

$$\bar{C}'(\underline{j}_u+1,n)\leqq MW(\underline{j}_u+1,n).$$

Addiert man hierzu (53), so erhält man, wenn etwa $n\in\mathfrak{M}_{\nu+1}$ ist:

$$\bar{C}'(n)=\bar{C}'(\underline{j}_u)+\bar{C}'(\underline{j}_u+1,n)\leqq MW(1,n)=\nu.$$

Diese letzte Formel gilt nun unter Berücksichtigung von (53) für alle $n\geqq0$. Nach Hilfssatz 1 ist daher schließlich

$$\gamma'_n\geqq\sigma_n\quad\text{für jedes}\quad n\geqq0.$$

Noch weitere Mengen zu erfassen, gestattet nun der Hilfssatz 9. Auf Grund von Satz I bleiben nämlich noch alle die Mengen übrig, die Hauptunterintervalle $\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda}$ besitzen, für die $D(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda})\geqq D(\mathfrak{I}_1)+1$ und $N(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda})\geqq\underline{j}_2+1$ ist. Es sei nun $\mathfrak{I}_{\varkappa_0}$ das $\mathfrak{I}$-Intervall mit kleinstem Index $\varkappa_0$, in dem derartige Hauptunterintervalle liegen, also $\varkappa_0\geqq2$. Ist $\mathfrak{I}_{\varkappa_0\lambda}$ ein solches, dann ist offenbar:

$$N(\underline{j}_{\varkappa_0}+1,\underline{j}_{\varkappa_0+1})=N(\mathfrak{I}_{\varkappa_0})=1+N(\underline{j}_{\varkappa_0}+1,\bar{j}_{\varkappa_0})\geqq1+N(\mathfrak{I}_{\varkappa_0\lambda})\geqq1+\underline{j}_2+1=\underline{j}_2+2>\underline{j}_2.$$

Wenn nun $N(\mathfrak{I}_\varkappa)\geqq\underline{j}_2$ für alle $\varkappa\geqq\varkappa_0$ gilt, so ist wieder

$$\gamma'_n\geqq\sigma_n\quad\text{für jedes}\quad n\geqq0.$$

Beweis: Für alle $n\leqq\underline{j}_{\varkappa_0}$ ist nach Satz I die Behauptung bereits bewiesen. Sei also $n\geqq\underline{j}_{\varkappa_0}+1$, aber sonst beliebig. Ist nun n etwa in $[\underline{j}_{\varkappa_0+x}+1,\underline{j}_{\varkappa_0+x+1}]$ gelegen $(x\geqq0)$, so ist:

$$\begin{aligned}\bar{C}'(n)&=\bar{C}'(\underline{j}_{\varkappa_0})+\bar{C}'(\underline{j}_{\varkappa_0+x}+1,n)+\sum_{\xi=0}^{x-1}\bar{C}'(\underline{j}_{\varkappa_0+\xi}+1,\underline{j}_{\varkappa_0+\xi+1})\\ &\leqq MW(1,\underline{j}_{\varkappa_0})+MW(\underline{j}_{\varkappa_0+x}+1,n)+\sum_{\xi+0}^{x-1}MW(\underline{j}_{\varkappa_0+\xi}+1,\underline{j}_{\varkappa_0+\xi+1})=MW(1,n),\end{aligned}$$

womit bereits alles bewiesen ist. Dies Ergebnis läßt sich mit dem Satz I und seiner oben gegebenen Erweiterung zusammenfassen zu

Satz II: Für die Gültigkeit von $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ ist hinreichend, daß alle Hauptunterintervalle $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$, für die $j_\varkappa$ endlich ist, wenigstens eine der beiden Eigenschaften:

$$D(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) \leqq D(\mathfrak{J}_1) \quad \text{oder} \quad N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) \leqq j_2 = j$$

besitzen. — Ist andernfalls $\mathfrak{J}_{\varkappa_0}$ das erste J-Intervall, das mindestens ein Hauptunterintervall $\mathfrak{J}_{\varkappa_0\lambda}$ enthält so, daß sowohl $D(\mathfrak{J}_{\varkappa_0\lambda}) \geqq D(\mathfrak{J}_1)+1$ als auch $N(\mathfrak{J}_{\varkappa_0\lambda}) \geqq j_2+1 = j+1$ ist, und gilt für alle $\varkappa \geqq \varkappa_0$ stets:

$$N(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq j_2 = j,$$

so ist ebenfalls $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ für alle $n \geqq 0$ [36]).

Bemerkung 5: Ist $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) \leqq j_2$ für alle $(\varkappa, \lambda)$, so besteht die Folge des Strukturſatzes (vgl. Definition 10) nur aus $z_0 = 0$ und $z_1 = 1$, also $\mathfrak{Z} = \{z_0, z_1\}$. Der Strukturſatz ist für diesen Fall nach Satz 2 somit bereits bewiesen [37]).

Bemerkung 6: Der Strukturſatz gilt auch, wenn $N(\mathfrak{J}_\varkappa) \geqq j_2$ für alle $\varkappa \geqq \varkappa_0$ und $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) \leqq j_2$ für alle $\varkappa < \varkappa_0$ gilt. In diesem Fall läßt sich die Folge $\mathfrak{Z}$ noch zu einer Folge $\mathfrak{Z}'$ verdichten, und zwar: Man beginne mit $z'_0 = z_0 = 0$, $z'_1 = z_1 = 1$, $z'_2 = j_{\varkappa_0}+1$ und nehme als weitere Glieder die Anfänge aller derjenigen Hauptunterintervalle, für die $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) \geqq j_1$ $(\varkappa \geqq \varkappa_0)$ ist, sowie alle Zahlen $j_\varkappa + 1$ $(\varkappa \geqq \varkappa_0)$. Es ist also $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{Z}'$.

Beweis: Es sei $n \geqq z'_\lambda$ und $z'_\lambda \in \mathfrak{J}_\varkappa$, $n \in \mathfrak{J}_{\varkappa+x}$ $(x \geqq 0)$. Dann ist, da offenbar nur noch der Fall $x > 0$ interessiert:

$$C'(z'_\lambda, n) = C'(z'_\lambda, j_{\varkappa+1}) + C'(j_{\varkappa+x}+1, n) + \sum_{\xi=1}^{x-1} C'(j_{\varkappa+\xi}+1, j_{\varkappa+\xi+1}),$$

wobei $C'(j_{\varkappa+1}+1, n)$ und $\sum_{\xi=1}^{x-1}$ gleich Null zu setzen sind, wenn $n = j_{\varkappa+1}$ ist. In Verbindung mit den Hilfssätzen 7 und 9 und der Bemerkung 4 ergibt sich ohne weiteres:

$$C'(z'_\lambda, n) \geqq N(z'_\lambda, j_{\varkappa+1})\,\sigma_{N^*} + N(j_{\varkappa+x}+1, n)\,\sigma_{N^*} + \left\{\sum_{\xi=1}^{x-1} N(j_{\varkappa+\xi}+1, j_{\varkappa+\xi+1})\right\}\sigma_{N^*}$$
$$= N(z'_\lambda, n)\,\sigma_{N^*} \qquad (N^* = N(z'_\lambda, n),$$

womit der Beweis erbracht ist.

Es sollen im folgenden noch zwei weitere hinreichende Bedingungen (Satz III und IV) hergeleitet werden. Man betrachte nunmehr die durch die Definition 10 erklärte Folge $\mathfrak{Z}$. Auch $\mathfrak{Z}$ stellt eine Intervalleinteilung von $\mathfrak{N}$ dar; man schreibe abkürzend:

$$\mathfrak{Z}_\nu = [z_\nu, z_{\nu+1}-1] = [z_\nu, \bar{z}_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

In jedem $\mathfrak{Z}_\nu$ ist mindestens ein Hauptunterintervall enthalten, da ja jedes $z_\nu = z_\nu$ nach Definition gleich einem Hauptunterintervallanfang, etwa gleich $j_{\varkappa\lambda}$, ist. Ferner gibt es wieder auf Grund der Definition 10, für $\nu \geqq 2$ in $[1, \bar{z}_\nu]$ keine Hauptunterintervalle, deren Länge größer als $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})$ ist $(j_{\varkappa\lambda} = z_\nu)$, und alle Hauptunterintervalle, deren Länge

[36]) Das Vorliegen eines unendlich langen J-Intervalls kennzeichnet sich offenbar dadurch, daß die Funktion $J(n)$ nach unten beschränkt ist. Offenbar begreift der zweite Teil des Satzes II aus dem ersten den Fall mit unendlichem J-Intervall mit ein.

[37]) Vgl. auch Bemerkung 3.

gleich $N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})$ ist, liegen in $\mathfrak{Z}_\nu$. Die Gesamtheit derjenigen in $\mathfrak{Z}_\nu$ $(\nu \geqq 2)$ gelegenen Hauptunterintervalle, die die gleiche maximale Länge haben, greife man heraus und bezeichne sie als *GML*-Intervalle; für diese wird nun eine Klasseneinteilung erklärt.

Definition 13: Zwei *GML*-Intervalle gehören dann und nur dann zur selben Klasse, wenn sie zueinander kongruent sind.

Definition 14: Zwei Klassen heißen zueinander spiegelkongruent, in Zeichen $\mathfrak{K}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{K}_2$, wenn aus $\mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{J}_2 \in \mathfrak{K}_2$ folgt: $\mathfrak{J}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{J}_2$.

Folgerung 8: Zwei verschiedene Klassen können niemals zueinander kongruente Intervalle enthalten, also nicht zueinander kongruent sein, weil ja nach Definition 13 alle zueinander kongruenten *GML*-Intervalle in eine Klasse gehören. Nennt man noch zwei Klassen zueiander inkongruent, in Zeichen $\mathfrak{K}_1 \not\equiv \mathfrak{K}_2$, wenn aus $\mathfrak{J}_1 \in \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{J}_2 \in \mathfrak{K}_2$, folgt $\mathfrak{J}_1 \overset{SP}{\not\equiv} \mathfrak{J}_2$, so sind zwei verschiedene Klassen entweder zueinander spiegelkongruent oder inkongruent.

Unter $K(\mathfrak{K}\,\mathfrak{J})$ verstehe man die Anzahl der Elemente, das heißt die Anzahl der Intervalle, von $\mathfrak{K}$ im Intervall $\mathfrak{J}$. Ist weiter $\mathfrak{K}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{K}_2$, so setze man noch:

$$Sp(\mathfrak{K}_1\mathfrak{J}) = K(\mathfrak{K}_2\mathfrak{J});\ Sp(\mathfrak{K}_1\mathfrak{J}) = 0, \quad \text{wenn } \mathfrak{K}_2\mathfrak{J} \text{ leer ist.}$$

Natürlich kann eine Klasse zu sich selbst spiegelkongruent sein; dann ist sie aber zu sämtlichen anderen Klassen inkongruent.

Jede Klasse ist vollständig in einem gewissen $\mathfrak{Z}_\nu$ enthalten; es können zwar noch Hauptunterintervalle in irgendwelchen $\mathfrak{Z}_{\nu+\varkappa}$ $(\varkappa \geqq 1)$ liegen, die zu einem *GML*-Intervall aus $\mathfrak{Z}_\nu$ kongruent sind; jedoch gehören sie der Definition der *GML*-Intervalle zufolge zu keiner Klasse.

Es bezeichne $\mathfrak{J}_{z_\nu}$ dasjenige Hauptunterintervall, mit welchem $\mathfrak{Z}_\nu$ beginnt, also:

$$\underline{j}_{z_\nu} = z_\nu = z_\nu .$$

Dann gilt:

$$\underline{j}_2 + 1 \leqq N(\mathfrak{J}_{z_2}) < N(\mathfrak{J}_{z_3}) < \cdots < N(\mathfrak{J}_{z_\nu}) < \cdots .$$

Mithin:

$$N(\mathfrak{J}_{z_\nu}) \geqq \underline{j}_2 + (\nu - 1) \qquad (\nu \geqq 2) . \tag{54}$$

In Anlehnung an das Gleichungssystem (51) werde jetzt für $\nu \geqq 2$ die Menge $\bar{\mathfrak{C}}'\,\mathfrak{Z}_\nu$ untersucht. Es sei daher $\bar{c}'$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{C}}'\,\mathfrak{Z}_\nu$ und $\underline{j}_{\varkappa\lambda}$ ein beliebiger *GML*-Intervallanfang aus $[z_\nu, \bar{c}']$. Man setze wieder

$$\bar{c}' - \underline{j}_{\varkappa\lambda} = \bar{v} \quad \text{und} \quad \bar{v} \in \mathfrak{J}_k \subset [0, \bar{z}_\nu] .$$

Daß nicht gleichzeitig $\bar{v} > \underline{j}_k$ und $(\bar{c}' - \underline{j}_k) \in \mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ sein kann, besagt schon der Beweis von (51). Es kann und darf also erstens wieder

$$\bar{c}' - \underline{j}_{\varkappa\lambda} = \bar{v} = \underline{j}_k$$

sein. Zweitens kann auch noch $\bar{v} > \underline{j}_k$ und $\bar{c}' - \underline{j}_k > \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}$ sein. Der zweite Fall werde weiter verfolgt. Wegen $\bar{v} > \underline{j}_k$ ist $\bar{v}$ ein Element eines Hauptunterintervalls von $\mathfrak{J}$. Es sei etwa: $\bar{v} \in \mathfrak{J}_{k\mu} \subset \mathfrak{J}_k$. Nun kann aber nicht $\underline{j}_{\varkappa\lambda} \leqq \bar{c}' - \underline{j}_{k\mu} < \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}$ sein, da sich dann wieder die Gleichungen (47) bis (50) aufstellen lassen, wobei nur $[\underline{j}_{k_\varrho} + 1, \bar{\jmath}_{k_\varrho}]$ durch $\mathfrak{J}_{k\mu}$ zu ersetzen und daher Formel (45) an Stelle von (34) heranzuziehen ist. Wäre nun etwa $\bar{c}' - \underline{j}_{k\mu} > \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}$, so wäre $\bar{c}' - \bar{\jmath}_{k\mu} > \underline{j}_{\varkappa\lambda} = \bar{c}' - \bar{v}$, da doch $N(\mathfrak{J}_{k\mu}) \leqq N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})$ ist ($\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ ist ja *GML*-Intervall); das hieße aber $\bar{v} > \underline{j}_{k\mu}$, also: $\bar{v} \notin \mathfrak{J}_{k\mu}$ entgegen der Voraussetzung.

Es muß also

$$\bar{c}' - j_{k\mu} = \bar{j}_{\varkappa\lambda}$$

sein. Aus $\bar{v} \in \mathfrak{J}_{k\mu}$ folgt jetzt weiter $N(\mathfrak{J}_{k\mu}) = N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda})$, und somit ist $\bar{v} = \bar{j}_{\varkappa\lambda}$. Man prüft nun ohne weiteres nach, daß

$$\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda} \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{J}_{k\mu} \qquad (s = \bar{c}')$$

ist. Es gilt daher der

Hilfssatz 10: Ist $\bar{c}'$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{C}}'\mathfrak{Z}_\nu$, und ist $j_{\varkappa\lambda}$ ein beliebiger GML-Intervallanfang, so ist die Differenz $\bar{c}' - j_{\varkappa\lambda}$ entweder gleich einem $\mathfrak{J}$-Intervallanfang oder gleich dem Ende eines Elements der zu $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ spiegelkongruenten Klasse [38]).

Für spiegelkongruente Hauptunterintervalle gilt in Folgerung 6, 1 nach (44):

$$D(\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda_1}) = D(\mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda_2}) = \bar{V}(\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda_1}) = \bar{V}(\mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda_2}) \qquad (\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda_1} \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda_2}).$$

Ist nun $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ ein beliebiges GML-Intervall aus $[z_\nu, n]$ $(n \geqq j_{\varkappa\lambda}, n \in \mathfrak{Z}_\nu)$, so läßt sich $\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n)$ nach Hilfssatz 10, wenn man noch $n = j_{\varkappa\lambda} + l$ setzt, wie folgt abschätzen: Die Anzahl der auf Grund des ersten Teils von Hilfssatz 10 in $[j_{\varkappa\lambda}, n]$ enthaltenen Zahlen ist höchstens gleich $JW(1, l)$; die Anzahl der auf Grund des zweiten Teils dieses Hilfssatzes darinnen enthaltenen Zahlen ist höchstens gleich $Sp(\mathfrak{K}[1, l]) \leqq Sp(\mathfrak{K}[z_\nu, n])$; da weitere Zahlen nicht in $[j_{\varkappa\lambda}, n]\bar{\mathfrak{C}}'$ enthalten sein können, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n) = \bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, j_{\varkappa\lambda} + l) &\leqq JW(1, l) + Sp(\mathfrak{K}[1, l]) \\ &\leqq JW(1, l) + Sp(\mathfrak{K}[z_\nu, n]) \qquad (n > j_{\varkappa\lambda}, n \in [j_{\varkappa\lambda}, \bar{z}_\nu], \mathfrak{J}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K}). \end{aligned} \tag{55}$$

Da nach Hilfssatz 2 stets $JW(1, l) \leqq MW(1, l)$ gilt, so folgt aus (55) weiter:

$$\begin{aligned} \bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n) = \bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, j_{\varkappa\lambda} + l) &\leqq MW(1, l) + Sp(\mathfrak{K}[1, l]) \\ &\leqq MW(1, l) + Sp(\mathfrak{K}[z_\nu, n]). \end{aligned} \tag{56}$$

Nunmehr können weitere hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ bzw. des Strukturſatzes angegeben werden.

Satz III: Ist für jedes j_k aus $\mathfrak{Z}_\nu$ und für alle $\nu \geqq 2$ immer mindestens eine Klasse $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{Z}_\nu$ enthalten, für die

$$Sp(\mathfrak{K}[1, l]) = 0 \qquad (l = j_k - j_{\varkappa\lambda}, \mathfrak{J}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K}[1, l])$$

ist, so gilt $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ für alle $n \geqq 0$, und es ist überdies der Strukturſatz für alle $\nu \geqq 0$ mit $\varepsilon = 0$ gültig. Insbesondere ist die Voraussetzung erfüllt, wenn schon $Sp(\mathfrak{K}[z_\nu, n]) = 0$ ist.

Vorbemerkung zum Beweis: Bildet man für einen beliebigen GML-Intervallanfang $j_{\varkappa\lambda}$ aus $\mathfrak{Z}_\nu$ die Differenz $\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n) - MW(1, l)$ $(n > j_{\varkappa\lambda}, l = n - j_{\varkappa\lambda})$, so erkennt man ohne weiteres, daß sich diese Differenz beim Fortschreiten von n zu $n + 1$ dem absoluten Betrage nach um höchstens Eins ändern kann. Nach (51) ist für $n < \bar{j}_{\varkappa\lambda}$ immer $\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n) - MW(1, l) \leqq 0$. Ist nun k eine beliebige positive ganze Zahl, so kann die in Rede stehende Differenz den Wert k, sofern sie ihn überhaupt wenigstens einmal annimmt, erstmalig nur dann annehmen, wenn l ein $\mathfrak{J}$-Intervallanfang ist; denn ein Wachsen kann überhaupt nur für solche n eintreten, die in $\bar{\mathfrak{C}}'$ enthalten sind, und wäre etwa l das Ende

[38]) Daß wirklich beide Fälle eintreten können, zeigt das am Schluß von § 4, VI gegebene Beispiel 8.

eines GML-Intervalls, so wäre die Differenz von n gegen das letzte vorhergehende Element aus $\mathfrak{C}'$ sicher nicht kleiner als $N(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda})$, so daß wegen

$$MW(j_{\varkappa\lambda}+l-N(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda})+1,\ j_{\varkappa\lambda}+l) \geqq MW(1,\ N(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda})-1) \geqq MW(1,\ j_2+\nu-2) \geqq 1$$
$$(\nu \geqq 2)$$

immer noch $\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, n) - MW(1, l) \leq k-1$ ist. Ganz entsprechend kann

$$\bar{C}'(n) - MW(1, n) = k \qquad (k \geqq 1 \text{ und ganz})$$

erstmalig nur gelten, wenn n ein $\mathfrak{I}$-Intervallanfang ist, was man unmittelbar vermittels Hilfssatz 7 erkennt.

Beweis von Satz III: Es sei n ein beliebiges Element aus $\mathfrak{Z}_\nu$. Liegt in $[z_\nu, n]$ kein $\mathfrak{I}$-Intervallanfang, so ist man auf Grund von Hilfssatz 7 fertig. Andernfalls sei j_k der größte in $[z_\nu, n]$ gelegene $\mathfrak{I}$-Intervallanfang (auf Grund der Vorbemerkung genügt es, die Untersuchung auf die $\mathfrak{I}$-Intervallanfänge zu beschränken). Setzt man nun in (56) an Stelle von $j_{\varkappa\lambda}$ den Anfang eines Elements der nach Voraussetzung für j_k existierenden Klasse, so ist wegen

$$Sp(\mathfrak{K}[1, l]) = 0 \qquad (l = j_k - j_{\varkappa\lambda},\ \mathfrak{I}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K})$$

nichts mehr zu beweisen.

Satz IV: Ist für jedes j_k aus $\mathfrak{Z}_\nu$ und alle $\nu \geqq 2$ immer mindestens eine Klasse $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{Z}_\nu$ enthalten, für die

$$Sp(\mathfrak{K}[1, l]) \leq 1 \qquad (l = j_k - j_{\varkappa\lambda},\ \mathfrak{I}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K}[1, l])$$

ist, so gilt $\gamma'_n \geqq \sigma_n$ für alle $n \geqq 0$, und es ist überdies der Strukturſatz für alle $\nu \geqq 0$ gültig, und zwar mit $\varepsilon = 0$ für $\nu \geqq 3$ und $\varepsilon = 0$ oder 1 für $\nu = 0, 1, 2$, wobei ε höchstens dann gleich 1 sein kann, wenn $N(\mathfrak{I}_{z_\nu}) = j_2 + 1$ ist. Es gilt dann: $\dfrac{C'(z_\nu, n)}{N(z_\nu, n)} \geqq \sigma - \dfrac{\varepsilon}{N(z_\nu, n)}$ [39].

Beweis: Man mache die beiden Fallunterscheidungen $N(\mathfrak{I}_{z_\nu}) > j_2+1$ und $N(\mathfrak{I}_{z_\nu}) = j_2+1$.

Fall 1: $N(\mathfrak{I}_{z_\nu}) > j_2 + 1$. Man nehme die Existenz eines j_k an so, daß erstmalig $\bar{C}'(z_\nu, j_k) - MW(1, j_k - z_\nu) = 1$ ist, was auf Grund der Vorbemerkung zum Beweis des Satzes III möglich wäre, wenn Satz IV falsch ist. $j_{\varkappa\lambda}$ sei nun der Anfang eines Elements der nach Voraussetzung existierenden Klasse. Da auf Grund von Hilfssatz 8 jetzt $\bar{C}'(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda}) \leq MW(1, N(\mathfrak{I}_{\varkappa\lambda}) - 1) - 1$ ist, so lautet (56) jetzt:

$$\bar{C}'(j_{\varkappa\lambda}, j_k) \leq \{MW(1, l) - 1\} + Sp \leq MW(1, l),$$

womit die Annahme über j_k unhaltbar wird. $\varepsilon = 0$ ist evident.

Fall 2: $N(\mathfrak{I}_{z_\nu}) = j_2 + 1$. Aus (54) folgt zunächst $\nu = 2$. Wieder sei j_k die kleinste Zahl, so daß $\bar{C}'(z_\nu, j_k) - MW(1, l) = 1$ ist. Man nehme die nach Voraussetzung in $[z_\nu, j_k]$ existierende Klasse $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1$. Dann sei etwa $\mathfrak{K}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{K}_2$. Jetzt wird dieser Fall in zwei Unterfälle aufgespalten, je nachdem $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2$ oder $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$ ist, und in dem ersten Unterfall wird die Betrachtung weiter in die Fälle $K(\mathfrak{K}_1[1, l]) = K(\mathfrak{K}_2[1, l]) = 1$ und $K(\mathfrak{K}_1[1, l]) \geqq 2$ zerlegt.

1. Unterfall: $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2$, also $\mathfrak{K}_1 \not\equiv \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2 \not\equiv \mathfrak{K}_2$.

1α) $K(\mathfrak{K}_1[1, l]) = K(\mathfrak{K}_2[1, l]) = 1$. Die hiernach vorhandenen einzigen Elemente der Klassen $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ mögen mit $\mathfrak{I}_{\varkappa_1\lambda}$ bzw. mit $\mathfrak{I}_{\varkappa_2\lambda}$ bezeichnet werden. Dann sind $j_{\varkappa_1\lambda}$

[39] Daß wirklich $\varepsilon = 1$ sein kann, beweist das am Ende von § 4, VI gegebene Beispiel 8.

bzw. $\bar{j}_{\varkappa_2\lambda}$ die einzigen Elemente, die eventuell in $\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda}\bar{\mathfrak{C}}'$ bzw. $\mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda}\bar{\mathfrak{C}}'$ enthalten ſein können. Wären $\bar{j}_{\varkappa_1\lambda}$ und $\bar{j}_{\varkappa_2\lambda}$ beide in $\bar{\mathfrak{C}}'$ enthalten, ſo wäre $\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda} \overset{SP}{\equiv} [0, j_2]$ und $\mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda} \overset{SP}{\equiv} [0, j_2]$, alſo nach Folgerung 5, 2:

$$\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda} \equiv \mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda},$$

was wegen $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2$ unmöglich iſt. Ohne Einſchränkung kann $\bar{j}_{\varkappa_1\lambda} \in \mathfrak{S}'$ angenommen werden. Dann iſt:

$$\bar{C}'(j_{\varkappa_1\lambda}, j_k) \leq \{JW(1, j_k - j_{\varkappa_1\lambda}) - JW(1, j_2)\} + 1 = JW(1, j_k - j_{\varkappa_1\lambda}) - 1 + 1 \leq MW(1, j_k - j_{\varkappa_1\lambda})$$

Damit iſt 1α erledigt; offenbar iſt $\varepsilon = 0$.

$1\beta)$ $K(\mathfrak{K}_1[1, l]) \geq 2$. Es werde jetzt $\varepsilon = 1$ zugelaſſen. Dann muß bewieſen werden, daß für kein $j_\varkappa$

$$\bar{C}'(z_2, j_\varkappa) - MW(1, l) = 2 \qquad (l = j_\varkappa - z_2)$$

gelten kann. Man mache die Annahme, es wäre doch einmal der Fall. Es mögen dann j_{k_1} und j_{k_2} die kleinſten Zahlen ſein ſo, daß die obige Differenz für j_{k_1} den Wert 1, für j_{k_2} den Wert 2 hat. Alſo $j_{k_1} = j_k$. Man betrachte die nach Vorausſetzung für j_{k_1} exiſtierende Klaſſe $\mathfrak{K}_{k_1} (= \mathfrak{K}_1)$ und die für j_{k_2} exiſtierende Klaſſe $\mathfrak{K}_{k_2}$. Wäre $\mathfrak{K}_{k_1} = \mathfrak{K}_{k_2}$, ſo würde aus (56) ſofort folgen, daß der Wert der obigen Differenz bei j_{k_2} doch noch gleich eins wäre entgegen der Annahme. Sei alſo $\mathfrak{K}_{k_1} \neq \mathfrak{K}_{k_2}$. Iſt nun etwa $\mathfrak{J}_{\varkappa_1\lambda} \in \mathfrak{K}_{k_1}$ und $\mathfrak{J}_{\varkappa_2\lambda} \in \mathfrak{K}_{k_2}$, ſo folgt genau wie unter 1α, daß nicht $\bar{j}_{\varkappa_1\lambda}$ und $\bar{j}_{\varkappa_2\lambda}$ zugleich in $\bar{\mathfrak{C}}'$ enthalten ſein können. Da ferner $j_{\varkappa_1\lambda} < j_{\varkappa_2\lambda}$ angenommen werden muß (ſonſt hätte ja ſchon $\mathfrak{K}_{k_1}$ auch als die zu j_{k_2} gehörige Klaſſe gewählt werden können), ſo ergibt ſich:

$$\begin{aligned}\bar{C}'(z_2, j_{k_2}) &= \bar{C}'(z_2, j_{\varkappa_2\lambda} - 1) + \bar{C}'(j_{\varkappa_2\lambda}, j_{k_2}) \\ &\leq MW(1, j_{\varkappa_2\lambda} - 1 - z_2) + 1 + MW(j_{\varkappa_2\lambda} - z_2, j_{k_2} - z_2) = MW(1, j_{k_2} - z_2) + 1,\end{aligned}$$

womit die Annahme über j_{k_2} unhaltbar iſt. Mithin iſt ε höchſtens gleich eins. — Es bleibt alſo noch zu zeigen, daß auch hier noch $\gamma'_n \geq \sigma_n$ für jedes n aus $\mathfrak{Z}_2$ gilt. Sei daher j_k die kleinſte Zahl ſo, daß $\gamma'_{j_k} < \sigma_{j_k}$ iſt. Es bezeichne $\mathfrak{J}^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}$ ein beliebiges Element der nach Vorausſetzung für j_k exiſtierenden Klaſſe $\mathfrak{K}_1$, alſo $\mathfrak{J}^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K}_1$, und $\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$ das einzige zu $\mathfrak{K}_1$ ſpiegelkongruente Element, alſo $\mathfrak{J}^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}$. Mit Rückſicht auf die Annahme über j_k erhält man:

$$\begin{aligned}MW(1, j_k) + 1 = \bar{C}'(j_k) &= \bar{C}'(j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} - 1) + \bar{C}'(j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}, j_k) \\ &\leq MW(1, j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} - 1) + \{MW(j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}, j_k) + 1\} = MW(1, j_k) + 1.\end{aligned}$$

Infolge der Gleichheit des erſten und letzten Gliedes dieſer Beziehung muß durchweg das Gleichheitszeichen ſtehen, womit ſich ergibt:

$$\begin{aligned}JW(1, j_k - j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}) + 1 \geq \bar{C}'(j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}, j_k) &= MW(j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}, j_k) + 1 \\ &\geq MW(1, j_k - j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}) + 1 \geq JW(1, j_k - j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}) + 1.\end{aligned}$$

Mithin gilt für jedes $\mathfrak{J}^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K}_1$ $(1 \leq \nu \leq b$, wobei $\mathfrak{J}^{(b)}_{\varkappa\lambda}$ das letzte Klaſſenelement vor j_k iſt):

$$MW(1, j_k - j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}) = JW(1, j_k - j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}). \tag{57}$$

Man ſetze abkürzend

$$j_k - j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} = n_\nu, \quad \text{alſo } n_\nu < j_k \text{ für jedes } \nu.$$

Auf Grund der Vorbemerkung beim Beweis von Satz III iſt wegen $Sp \leq 1$:

$$\bar{C}'(j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda}, j^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} + \bar{j}_{\varkappa\lambda}) \leq MW(1, \bar{j}_{\varkappa\lambda}) \quad \text{für alle } \nu,$$

woraus folgt, daß jedes n_ν sogar ein $\mathfrak{J}$-Intervallanfang ist. Setzt man ferner noch:

$$n' = \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda},$$

so folgt aus

$$n_b = \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(b)} > \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}$$

ohne weiteres

$$\underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(b)} - N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) + 1 > \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda} - N(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda}) + 1,$$

also

$$\underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda} = n' > \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}^{(b)},$$

so daß

$$\bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}^{(b)} < n' < \underline{j}_k$$

ist.

1. $\underline{j}_{\varkappa\lambda} > \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)}$. Dann ist $n_1 > n'$; mithin:

$$(58_1) \qquad \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}^{(b)} < n_1 < \underline{j}_k \quad \text{und} \quad MW(n_1) = JW(n_1).$$

2. $\underline{j}_{\varkappa\lambda} < \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)}$. Dann ist:

$$\bar{C}'(\underline{j}_{\varkappa\lambda}, \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)} - 1) \leqq MW(1, \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)} - \underline{j}_{\varkappa\lambda} - 1)$$

und

$$\bar{C}'(\underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)}, \underline{j}_k) \leqq MW(1, \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)}) + 1 \leqq MW(\underline{j}_{\varkappa\lambda}^{(1)} - \underline{j}_{\varkappa\lambda}, \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}) + 1.$$

Durch Addition erhält man:

$$\bar{C}'(\underline{j}_{\varkappa\lambda}, \underline{j}_k) \leqq MW(1, \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}) + 1.$$

Genau wie bei der Herleitung von (57) findet man:

$$MW(1, \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}) = JW(1, \underline{j}_k - \underline{j}_{\varkappa\lambda}) = MW(1, n') = JW(1, n').$$

Somit gilt:

$$(58_2) \qquad \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}^{(b)} < n' < \underline{j}_k \quad \text{und} \quad MW(n') = JW(n'),$$

woraus noch sofort folgt, daß auch n' ein $\mathfrak{J}$-Intervallanfang ist. Durch (58_1) und (58_2) ist also stets die Existenz eines $\mathfrak{J}$-Intervallanfangs — er heiße $\underline{j}_\varrho$ — gesichert so, daß

$$(58) \qquad \bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}^{(b)} < \underline{j}_\varrho < \underline{j}_k \quad \text{und} \quad MW(\underline{j}_\varrho) = JW(\underline{j}_\varrho) = \varrho, \quad \text{also} \quad \underline{j}_\varrho \in \mathfrak{M}_\varrho$$

gilt. Da für $\underline{j}_\varrho$ noch $\gamma'_{\underline{j}_\varrho} \geqq \sigma_{\underline{j}_\varrho}$ gilt, ist Hilfssatz 5 anwendbar, es ist also:

$$(59) \qquad S'(\underline{j}_\varrho) \geqq D(\underline{j}_\varrho).$$

Für alle eventuell in $[\underline{j}_\varrho, \underline{j}_k]$ gelegenen Hauptunterintervalle, $\mathfrak{J}_{\lambda\mu}$ sei ein solches, gilt nun aber:

$$S'(\mathfrak{J}_{\lambda\mu}) = D(\mathfrak{J}_{\lambda\mu});$$

denn entweder ist $N(\mathfrak{J}_{\lambda\mu}) \leqq \underline{j}_2$ oder $\mathfrak{J}_{\lambda\mu}$ ist, falls $N(\mathfrak{J}_{\lambda\mu}) = \underline{j}_2 + 1$ ist, zu den Elementen von $\mathfrak{K}_1$ inkongruent. Da aber nur der Fall interessiert, daß jedes $\bar{\jmath}_{\varkappa\lambda}^{(\nu)} \in \bar{\mathfrak{C}}'$ ist — sonst wäre ja schon von vornherein $\varepsilon = 0$ gesichert —, so kann nicht $\bar{\jmath}_{\lambda\mu} \in \bar{\mathfrak{C}}'$, also speziell auch nicht $\bar{\jmath}_{\varkappa\lambda} \in \bar{\mathfrak{C}}'$ $(\mathfrak{J}_{\varkappa\lambda} \in \mathfrak{K}_2)$ sein (vgl. 1α). Daher gilt:

$$S'(\underline{j}_\varrho + 1, \underline{j}_k) \geqq D(\underline{j}_\varrho + 1, \underline{j}_k).$$

Addiert man (59) hinzu, so findet man schließlich:

$$S'(\underline{j}_k) \geqq D(\underline{j}_k).$$

Nach Hilfsſatz 5 iſt daher:

$$\gamma'_{j_k} \geqq \sigma_{j_k},$$

womit die Annahme über j_k hinfällig wird. Damit iſt der Unterfall 1 erledigt.

Unterfall 2: $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$, alſo $\mathfrak{K}_1 \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{K}_1$. Wieder laſſe man $\varepsilon = 1$ zu. Der Beweis iſt der gleiche wie eben bei 1β mit der Vereinfachung, daß wegen $K(\mathfrak{K}_1[1, l]) = K(\mathfrak{K}_2[1, l]) = 1$ jetzt $b = 1$, alſo $n_1 = n_b = n'$ iſt. Damit iſt Satz IV bis auf die im Strukturſatz ausgeſprochene Behauptung bewieſen, daß für jedes n aus $[z_0, 2(z_2 + j_2 + 1)]$ noch $\varepsilon = 0$ iſt für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 1$. Die weitere Behauptung, daß auch $\varepsilon = 0$ iſt für alle n aus $[z_\varkappa, 2(z_\varkappa + j_2 + \varkappa - 1)]$, wenn $\varkappa \geqq 3$ iſt, iſt für den Satz IV evident, da ja für $\varkappa \geqq 3$ ſogar ſtändig $\varepsilon = 0$ iſt. Dieſe letzten Behauptungen ſind im Strukturſatz jedoch allgemein aufgeſtellt worden, ſie mögen daher anſchließend unabhängig von Satz IV bewieſen werden.

Beweis: Teil 1: $\varkappa > 2$. Wegen $2(z_\varkappa + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa})) \geqq 2(z_k + j_2 + \varkappa - 1)$ bedeutet es nur eine Verſchärfung, wenn n aus $[z_\varkappa, 2(z_\varkappa + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}))]$ gewählt wird. Weiter iſt $2(z_\varkappa + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa})) = z_\varkappa + (z_\varkappa + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) - 1) + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1 = z_\varkappa + \bar{j}_{z_\varkappa} + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1$. Liegt nun in $[\bar{j}_{z_\varkappa} + 1, \bar{j}_{z_\varkappa} + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1]$ kein GML-Intervallanfang, ſo iſt nach (56) und Hilfsſatz 8:

$$(60_1) \qquad \bar{C}'(z_\varkappa, z_\varkappa + \bar{j}_{z_\varkappa} + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1) \leqq MW(1, \bar{j}_{z_\varkappa} + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1);$$

iſt andernfalls ein GML-Intervallanfang, etwa $j_{\lambda\mu}$ vorhanden, ſo genügt es auf Grund von Hilfsſatz 7, ſich auf den Fall $\bar{j}_{z_\varkappa} + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1 = \bar{j}_{\lambda\mu} + 1$ zu beſchränken. Mit Hilfsſatz 9 gilt auch hier wieder (60_1).

Teil 2: $\varkappa = 0$ oder 1. Iſt zunächſt in $[\bar{j}_{z_\varkappa} + 1, \bar{j}_{z_\varkappa} + N(\mathfrak{J}_{z_\varkappa}) + 1]$ kein GML-Intervallanfang vorhanden, ſo iſt auf $[z_2, z_2 + \bar{j}_{z_2} + N(\mathfrak{J}_{z_2}) + 1]$ Satz IV anwendbar, und man hat:

$$(60_2) \qquad \bar{C}'(n) \leqq MW(n);$$

andernfalls führt dieſelbe Überlegung wie eben im Teil 1 zum Ziel [40]).

Daß im Intervall $\mathfrak{Z}_2$ der Fall $\varepsilon = 1$ wirklich eintreten kann, zeigt das folgende

Beiſpiel 8:

$$\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 25, 26, \ldots\},$$
$$\mathfrak{B} = \{0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 25, 26, \ldots\} = \mathfrak{A};$$
$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, \ldots\}.$$

Es iſt: $\mathfrak{J}_1 = [0, 6]$, $\mathfrak{J}_2 = [7, 15]$, $\mathfrak{J}_3 = [16, 22]$, $\mathfrak{J}_4 = [23, 23]$, $\mathfrak{J}_5 = [24, 24]$. Die Hauptunterintervalle ſind:

$$\mathfrak{J}_{11} = [1, 6], \quad \text{alſo} \quad N(\mathfrak{J}_{11}) = 6 = \bar{j}_1,$$

$\mathfrak{J}_{21} = [8, 15]$, alſo $N(\mathfrak{J}_{21}) = 8 = j_2 + 1$, und es iſt $\mathfrak{J}_{21} \overset{SP}{\equiv} \mathfrak{J}_{21} \overset{SP}{\equiv} [0, j_2]$, und $z_2 = j_2 + 1 = 8$, $\mathfrak{J}_{31} = [17, 22]$, alſo $N(\mathfrak{J}_{31}) = 6 < j_2 < N(\mathfrak{J}_{21})$, das heißt: $\mathfrak{J}_{31}$ iſt kein GML-Intervall. Weiter iſt offenbar $\bar{z}_2 = 24$, alſo $\mathfrak{Z}_2 = [8, 24]$. Ferner iſt: $\sigma_n = \operatorname{Min}(1, \alpha_n + \beta_n)$ für alle $n \geqq 0$, weil $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ iſt. Insbeſondere iſt $\sigma_7 = \sigma_{16} = \sigma_{23}$

[40]) Als numeriſche Abſchätzung für den Gültigkeitsbereich von $\varepsilon = 0$ erhält man wegen $2(z_2 + j_2 + 1) \geqq 2(j_2 + 1 + j_2 + 1) = 4(j_2 + 1) \geqq 4(3 + 1) = 16$, daß in $[0, 16]$ für beliebige Mengen ſtets $\gamma' \geqq \sigma$ gilt.

$= \frac{6}{7}$, $\sigma_{24} = \frac{5}{6} = \sigma = \alpha + \beta$. Weiter hat man $C(z_2, 24) = C'(8, 24) = 14$, also

$$\frac{C'(8,24)}{N(8,24)} = \frac{14}{17} = \frac{15}{17} - \frac{1}{17} > \frac{6}{7} - \frac{1}{17} = \sigma_{17} - \frac{1}{17} > \sigma - \frac{1}{17}, \quad \text{aber} \quad \frac{14}{17} < \frac{5}{6},$$

das heißt:

$$\sigma > \frac{C'(z_2, 24)}{N(z_2, 24)} > \sigma - \frac{1}{17}.$$

Jedoch gilt immer noch, wie Satz IV es ja auch verlangt:

$$\frac{C'(24)}{24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} = \sigma.$$

Das j_k der Formel (58) ist hier gleich $j_3 = 16$; denn es ist ja $[16\,\vartheta_{18}] = \left[16 \cdot \frac{1}{7}\right] = 2$, mithin $j_3 \in \mathfrak{M}_3$ und $24 - z_2 = 24 - 8 = 16 = j_3$. Damit ist gezeigt, daß die Möglichkeit von $\varepsilon = 1$ im Satz IV keine Schwäche des Beweises bedeutet, und daß zumindest für z_2 der Strukturſatz nicht ohne ein Korrekturglied gelten kann, was wohl dadurch bedingt zu ſein ſcheint, daß ſchon das Intervall $[0, j_2]$ den Charakter eines GML-Intervalls hat, wenn $N(\mathfrak{I}_{z_2}) = j_2 + 1$ ist, ſo daß alſo ſo geſehen dem z_2 gar nicht die Definitionseigenſchaften der übrigen $z_\varkappa$, $\varkappa \geqq 3$, zukommen. — Dieſes eben angeführte Beiſpiel zeigt ferner noch, daß der Hilfsſatz 10 in der oben ausgeſprochenen Form nicht dahin verſchärft werden kann, daß nur eine der beiden Möglichkeiten für alle Elemente aus $\bar{\mathfrak{C}}'\,\mathfrak{Z}_\nu$ beſteht; denn es iſt:

$$\bar{\mathfrak{C}}' = \bar{\mathfrak{C}} = \{7, 15, 23, 24\};\ \bar{C}'(8, 8+16) = 3 = JW(1, 16) + Sp(\mathfrak{R}[8, 24]) = 2 + 1.$$

$15 = 8 + 7 = j_{21} + j_2$ entſpricht dem erſten Teil von Hilfsſatz 10 ($\mathfrak{I}_{21} \in \mathfrak{R}$); ($\mathfrak{I}_{21}$ iſt ja ein GML-Intervall); $23 = 8 + 15 = j_{21} + j_{21}$ entſpricht dem zweiten Teil; $24 = 8 + 16 = j_{21} + j_3$ entſpricht wieder dem erſten Teil von Hilfsſatz 10. In $\mathfrak{Z}_1$ können auf Grund von (46) höchſtens $\mathfrak{I}$-Intervallanfänge in $\bar{\mathfrak{C}}'$ enthalten ſein, hier iſt in der Tat $j_2 = 7$ Element von $\bar{\mathfrak{C}}'$. Schließlich folgt aus $15 \in \bar{\mathfrak{C}}'$ und aus $N(\mathfrak{I}_{21}) = j_2 + 1$ bzw. aus $D(\mathfrak{I}_{21}) = 4 > 3 = D(\mathfrak{I}_1)$, daß Hilfsſatz 6 ohne zuſätzliche Vorausſetzungen nicht verſchärft werden kann.

VII. Abſchluß des Beweiſes für den allgemeinen Fall.

Um den Beweis des Strukturſatzes zum Abſchluß zu bringen, muß jetzt noch der Beweis der Formel 10 für den allgemeinen Fall erbracht werden.

Aus dem Hilfsſatz 7 gewinnt man offenbar ſofort

$$\bar{C}'(z_\nu, n) \leqq MW(1, n - z_\nu) + JW(z_\nu, n) \qquad (\nu \geqq 2)\ ^{41}).$$

Aus dieſer Abſchätzung und aus (56), wo $j_{\varkappa\lambda}$ durch z_ν zu erſetzen iſt, folgt offenbar

$$\bar{C}'(z_\nu, n) \leqq MW(1, n - z_\nu) + \mathrm{Min}\,(Sp(\mathfrak{R}[1, n - z_\nu]), JW(z_\nu, n)) \qquad (n \in \mathfrak{Z}_{z_\nu}, \mathfrak{I}_{z_\nu} \in \mathfrak{R}).$$

Setzt man abkürzend $Sp = x$ und $JW(z_\nu, n) = y$, ſo iſt

$$N(z_\nu, n) = x\,N(\mathfrak{I}_{z_\nu}) + y + r,$$

wobei r die Anzahl der reſtlichen Elemente bedeuten möge.

---

41) Für $\nu = 0$ und 1 iſt ja durch Satz I (vgl. Bemerkung 3) bereits $\gamma' \geqq \sigma$ bewieſen.

1. Fall: $y \leqq x$.

$$N(z_\nu, n) = (y + x - y)\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + y + r \geqq y\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + (x - y)\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + y$$
$$\geqq y\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + x - y + y = y\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + x \geqq y\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + y = y\,(N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1),$$

also:

$$y \leqq \frac{N(z_\nu, n)}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1}.$$

2. Fall: $y > x$.

$$N(z_\nu, n) = x\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + y + r \geqq x\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + y > x\,N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + x = x\,(N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1),$$

also:

$$x < \frac{N(z_\nu, n)}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1}.$$

Beide Fälle zusammen ergeben daher:

$$\operatorname{Min}(x, y) \leqq \frac{N(z_\nu, n)}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1}.$$

$$\frac{C'(z_\nu, n)}{N(z_\nu, n)} = \frac{N(z_\nu, n) - \bar{C}'(z_\nu, n)}{N(z_\nu, n)} \geqq \frac{N(z_\nu, n) - MW(1, n - z_\nu) - \dfrac{N(z_\nu, n)}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1}}{N(z_\nu, n)}$$
$$= \frac{N(z_\nu, n) - MW(1, n - z_\nu)}{N(z_\nu, n)} - \frac{1}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1} \geqq \sigma_{N(z_\nu, n) - 1} - \frac{1}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1},$$

also:

$$\frac{C'(z_\nu, n)}{N(z_\nu, n)} \geqq \sigma_{N(z_\nu, n)} - \frac{1}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1} \geqq \sigma - \frac{1}{N(\mathfrak{Z}_{z_\nu}) + 1} \geqq \sigma - \frac{1}{j + \nu};$$

es läßt sich mithin, wie die letzte Formel zeigt, $j + \nu - 1$ durch $N(\mathfrak{Z}_{z_\nu})$ ersetzen. Um sich von der Voraussetzung $n \in \mathfrak{Z}_\nu$ zu befreien, zerlege man, wenn etwa $n \in \mathfrak{Z}_{\nu+x}$, $x \geqq 1$, ist, $C'(z_\nu, n)$ in $\sum_{\xi=0}^{x-1} C'(\mathfrak{Z}_{\nu-\xi}) + C'(z_{\nu+x}, n)$ und wende die letzte Formel auf jeden Summanden einzeln an. Damit ist der Strukturſatz vollständig bewieſen.

Lebenslauf.

Am 16. 10. 1913 wurde ich, Hans-Heinrich Ostmann, als Sohn des Bergverwalters Otto Ostmann und seiner Ehefrau Maria geb. Zobel zu Beuthen OS. geboren. Ich bin wie meine Eltern deutscher Staatsangehörigkeit und Abstammung sowie evangelischer Konfession. Nachdem ich von Ostern 1920 bis 1923 Fliegners Privatvorschule in Beuthen OS. besucht hatte, trat ich Ostern 1923 in das humanistische Hindenburg-Gymnasium meiner Vaterstadt ein, welches ich Ostern 1932 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Vom Sommersemester 1932 an studierte ich an den Universitäten Berlin, München und Breslau Mathematik, Physik und Chemie; die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 29. 6. 1938 vor der Naturwissenschaftlichen Fakultät Breslau. Nachdem ich ein weiteres Jahr am Breslauer Mathematischen Seminar zu meiner wissenschaftlichen Fortbildung gearbeitet und von Kriegsausbruch an Kriegstätigkeiten an der Karsten-Centrum Grube und an der Staatsbauschule für Hoch- und Tiefbau in Beuthen OS. wahrgenommen hatte, trat ich am 1. 4. 1940 die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Lehrstuhl für Höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau an.

Meine akademischen Lehrer sind: In Berlin: Bieberbach, Feigl, Nernst, Schlenk, Ehrhard Schmidt; in München: Aumann, Carathéodory, Gerlach, Perron, Sommerfeld, Wieland; in Breslau: Cramer, Feigl, Fues, Hückel, Julius Meyer, Radon, Tautz.

Insbesondere möchte ich an dieser Stelle meines verehrten Lehrers, Herrn Professor Dr. Feigl, gedenken und meinen tief empfundenen Dank aussprechen für die viele Mühe namentlich bei der Textgestaltung und Formgebung der Dissertation sowie beim Lesen der Korrekturen.

Hans-Heinrich Ostmann.